Terminale S - Problème sur le théorème des valeurs intermédiaires.

Niveau : Assez difficile.

Pré-requis :
Dérivée d'un produit, d'une fonction composée, de la fonction racine carrée, aire et périmètre d'un triangle isocèle, théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone.

Énoncé :

ABC est un triangle isocèle en A dont le périmètre est égal à 20. On pose $BC = x$ (avec $x \geqslant 0$)

1) Démontrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{x}{2}\sqrt{100-10x}$ avec $0 \leqslant x \leqslant 10$

2) **a)** Étudier les variations de la fonction f définie sur [0;10] par f(x)= $\frac{x}{2}\sqrt{100-10x}$

b) Déduisez-en qu'il existe exactement deux valeurs de BC telles que le triangle ABC ait une aire égale à 10.

Corrigé :

1) $Aire_{ABC} = \frac{x \times h}{2}$.

Dans le triangle AHC rectangle en H, on applique le théorème de Pythagore :

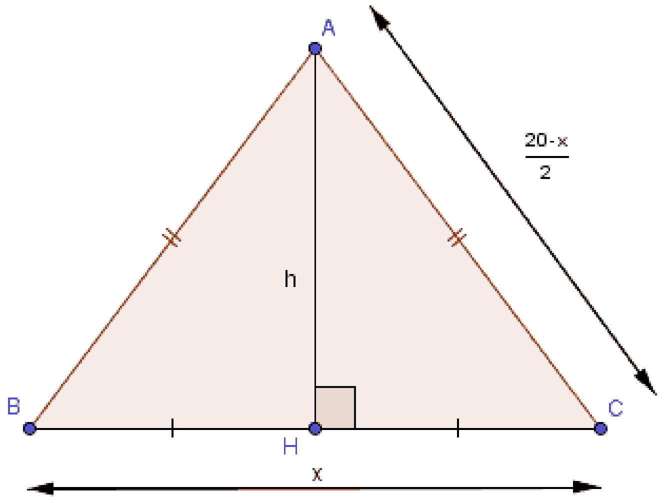
$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{20-x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = \left(\frac{20-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{400-40\text{x}+x^2-x^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 100-10x$$

Comme h est une longueur donc $h \geqslant 0$, on peut écrire : $h = \sqrt{100-10x}$.

Donc $Aire_{ABC} = \frac{x \times \sqrt{100-10x}}{2} = \frac{x}{2}\sqrt{100-10x}$



2) **a)** f est définie sur [0;10] par $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{100-10x}$

f est définie sur [0;10], dérivable sur [0;10[.

Pour tout $x \in [0;10]$, $f(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = \frac{x}{2}$ et $v(x) = \sqrt{100-10x}$.

$$u'(x) = \frac{1}{2} \text{ et } v'(x) = \frac{-10}{2\sqrt{100-10x}} = \frac{-5}{\sqrt{100-10x}}$$

En effet : $v(x) = t \circ w(x)$ avec $w(x) = 100-10x$ donc $w'(x) = -10$ et $t(x) = \sqrt{x}$ donc $t'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$v'(x) = w'(x) \times t' \circ w(x) = -10 \times \frac{1}{2\sqrt{100-10x}} = \frac{-5}{\sqrt{100-10x}} .$$

Pour tout $x \in [0;10[$, $f'(x) = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \sqrt{100-10x} + \frac{-5}{\sqrt{100-10x}} \times \frac{x}{2}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{100-10x}\times\sqrt{100-10x}-5x}{2\sqrt{100-10x}}$$

$$f'(x)=\frac{100-10x-5x}{2\sqrt{100-10x}} \qquad \boxed{f'(x)=\frac{100-15x}{2\sqrt{100-10x}}} \qquad \frac{100}{15}=\frac{20\times 5}{3\times 5}=\frac{20}{3}\approx 6{,}67$$

x	0		$\frac{20}{3}$		10
$100-15x$		$+$	0	$-$	
$2\sqrt{100-10x}$		$+$		$+$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
f	0	$\nearrow$	$\frac{100\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

$$f\left(\frac{20}{3}\right)=\frac{\frac{20}{3}}{2}\times\sqrt{100-10\times\frac{20}{3}}=\frac{20}{6}\times\sqrt{\frac{300-200}{3}}=\frac{10}{3}\times\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{3}}=\frac{10\times 10}{3\sqrt{3}}=\boxed{\frac{100\sqrt{3}}{9}}$$

b) Comparons $\frac{100\sqrt{3}}{9}$ à 10. $10=\frac{90}{9}$. Or $100>90$ et $\sqrt{3}>1$ puisque $\sqrt{(3)^2}=3$, $1^2=1$ et que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

$100>90$ et $\sqrt{3}>1 \Rightarrow 100\sqrt{3}>90\times 1$ (puisque les membres de ces deux inégalités sont des nombres positifs, on peut les multiplier membre à membre)

donc $\frac{100\sqrt{3}}{9}>\frac{90}{9}$, soit $\boxed{\frac{100\sqrt{3}}{9}>10}$.

Comme *f* est strictement croissante sur [0; $\frac{20}{3}$], que $f(x)<10$ et $f(\frac{20}{3})>10$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe une unique valeur α entre de]0; $\frac{20}{3}$ [telle que f(α)=10.

Comme *f* est strictement décroissante sur [$\frac{20}{3}$;10], que $f(\frac{20}{3})>10$ et $f(10)<10$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe une unique valeurs β dans] $\frac{20}{3}$;10[telle que f(β)=10.

Il existe donc deux valeurs distinctes, α et β, dans [0;20], telles que $f(x)=10$, c'est-à-dire qu'il existe deux valeurs distinctes de BC, dans [0;20], telles que l'aire du triangle ABC vaille 10 cm^2.