Terminale S – Exercices pour débuter sur la forme algébrique des nombres complexes.

Correction.

Exercice 1 : $\boxed{z_1=-1+2i}$ et $\boxed{z_2=3+4i}$.

a) $z_1+z_2=-1+2i+3+4i$ $\boxed{z_1+z_2=2+6i}$

b) $z_1-z_2=-1+2i-(3+4i)$ $z_1-z_2=-1+2i-3-4i$ $\boxed{z_1-z_2=-4-2i}$

c) $z_1-3z_2=-1+2i-3(3+4i)$ $z_1-3z_2=-1+2i-9-12i$ $\boxed{z_1-3z_2=-10-10i}$

d) $z_1z_2=(-1+2i)(3+4i)$ $z_1z_2=-3-4i+6i+8i^2$ $z_1z_2=-3-8+2i$ $\boxed{z_1z_2=-11+2i}$

Exercice 2 :

a) $(1+i)^2=1^2+2\times1\times i+i^2$ $(1+i)^2=1+2i-1$ $\boxed{(1+i)^2=2i}$

b) $(1-i)^2=1^2-2\times1\times i+i^2$ $\boxed{(1-i)^2=-2i}$

c) $(3-i)^2=3^2-2\times3\times i+i^2$ $(3-i)^2=9-6i-1$ $\boxed{(3-i)^2=8-6i}$

Exercice 3 : $\boxed{j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

1) $j^2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ $j^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times i\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ $j^2=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}$ $\boxed{j^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

2) $1+j+j^2=1+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $1+j+j^2=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{1+j+j^2=0}$

Exercice 4 : Quels sont les entiers naturels pour lesquels $(1+i)^n$ est un réel ?

Recherche préalable :
$(1+i)^0=1$ est un réel.
$(1+i)^1=1+i$ n'est pas un réel.
$(1+i)^2=2i$ (cf. exercice 2) est un imaginaire pur.
$(1+i)^3=(1+i)^2\times(1+i)=2i(1+i)=2i+2i^2=2i-2$ n'est pas un réel.
$(1+i)^4=(1+i)^3\times(1+i)=(2i-2)(1+i)=2i+2i^2-2-2i=-2-2=-4$ est un réel.

Pour tout n entier naturel multiple de 4, n peut s'écrire $4k$ où k $\in\mathbb{N}$.
$(1+i)^n=(1+i)^{4k}=((1+i)^4)^k=(-4)^k$ donc $(1+i)^n$ est un réel.

En revanche, si n est un entier naturel non multiple de 4, alors n peut s'écrire soit $4k+1$, soit $4k+2$, soit $4k+3$ où k est un entier naturel.

1[er] cas : si $n=4k+1$, alors $(1+i)^n=(1+i)^{4k+1}=(1+i)^{4k}\times(1+i)^1=(-4)^k\times(1+i)=(-4)^k+i\times(-4)^k$.

Pour tout entier k, $(-4)^k \neq 0$, donc la partie imaginaire de $(1+i)^n$ est non nulle. Donc $(1+i)^n$ n'est pas un réel.

2ème cas : si $n=4k+2$, alors $(1+i)^n=(1+i)^{4k+2}=(1+i)^{4k}\times(1+i)^2=(-4)^k\times 2i$
$(1+i)^n$ est un imaginaire pur dont la partie imaginaire, $(-4)^k\times 2$, est non nulle. Ce n'est donc pas un réel.

3ème cas : si $n=4k+3$, alors $(1+i)^n=(1+i)^{4k+3}=(1+i)^{4k}\times(1+i)^3=(-4)^k\times(2i-2)=-2\times(-4)^k+2i\times(-4)^k$
La partie imaginaire de $(1+i)^n$ est $2\times(-4)^k$ qui est non nul. Donc $(1+i)^n$ n'est pas un réel.

Bilan : $(1+i)^n$ est un réel si et seulement si **n est un multiple de 4**.

Exercice 5 :

a) $(2+i)^2(1-3i)=(4+4i-1)(1-3i)=(3+4i)(1-3i)=3-12i^2-9i+4i=3+12-5i$
$\boxed{(2+i)^2(1-3i)=15-5i}$

b) $(5-2i)(1+4i)(2-i)=(5+20i-2i-8i^2)(2-i)=(5+8+18i)(2-i)=(13+18i)(2-i)$
$(5-2i)(1+4i)(2-i)=26-18i^2-13i+36i=26+18+23i$ $\boxed{(5-2i)(1+4i)(2-i)=44+23i}$

Exercice 6 : x et y sont deux nombres réels. Quelle est la forme algébrique de $(x+1+iy)(x-1-iy)$?

$(x+1+iy)(x-1-iy)=(x+1)(x-1)+iy(x-1)-iy(x+1)-i^2y^2$
$(x+1+iy)(x-1-iy)=(x^2-1+y^2)+iy[x-1-(x+1)]$
$(x+1+iy)(x-1-iy)=(x^2+y^2-1)+iy\times(-2)$
$\boxed{(x+1+iy)(x-1-iy)=(x^2+y^2-1)-2iy}$

avec $\mathrm{Re}((x+1+iy)(x-1-iy))=x^2+y^2-1$ et $\mathrm{Im}((x+1+iy)(x-1-iy))=-2y$

Exercice 7 : $\boxed{z_1=1-3i}$, $\boxed{z_2=4+2i}$ et $\boxed{z_3=5-2i}$.

(dans les explications, x et y désignent des réels)

a) $\mathrm{Re}(z_1+z_2+z_3)=\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)+\mathrm{Re}(z_3)=1+4+5$ $\boxed{\mathrm{Re}(z_1+z_2+z_3)=10}$

En effet, la partie réelle d'une somme est égale à la somme des parties réelles, car $(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i(y+y')$.

b) $\boxed{\mathrm{Im}(iz_1)=\mathrm{Re}(z_1)=1}$ car $i(x+iy)=ix+i^2y=-y+ix$ donc $\mathrm{Im}(i(x+iy))=x$

c) $z_1z_2=(1-3i)(4+2i)=4+2i-12i-6i^2=10-10i$ Donc $\boxed{\mathrm{Im}(z_1z_2)=-10}$

d) $\mathrm{Re}(2z_1-3z_2+z_3)=2\mathrm{Re}(z_1)-3\mathrm{Re}(z_2)+\mathrm{Re}(z_3)=2\times1-3\times4+5=2-12+5$ $\boxed{\mathrm{Re}(2z_1-3z_2+z_3)=-5}$

En effet : pour tout réel λ, et pour tout complexe $z=x+iy$ où x et y sont réels,

$\mathrm{Re}(\lambda z)=\mathrm{Re}(\lambda(x+iy))=\mathrm{Re}(\lambda x+\lambda iy)=\lambda x=\lambda\mathrm{Re}(z)$

Exercice 8 : a) $\mathrm{i}(1-\mathrm{i})=\mathrm{i}-\mathrm{i}^2=\mathrm{i}+1$ $\boxed{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})=1+\mathrm{i}}$

b) $(2-3\mathrm{i})(4+\mathrm{i})=8+2\mathrm{i}-12\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2=8+3-10\mathrm{i}$ $\boxed{(2-3\mathrm{i})(4+\mathrm{i})=11-10\mathrm{i}}$

c) $\frac{3+2\mathrm{i}}{4-\mathrm{i}}=\frac{(3+2\mathrm{i})(4+\mathrm{i})}{(4-\mathrm{i})(4+\mathrm{i})}=\frac{12+3\mathrm{i}+8\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{4^2-\mathrm{i}^2}=\frac{12-2+11\mathrm{i}}{16+1}$ $\boxed{\frac{3+2\mathrm{i}}{4-\mathrm{i}}=\frac{10}{17}+\frac{11}{17}\mathrm{i}}$

Exercice 9 : a) $\frac{1}{2+3\mathrm{i}}=\frac{1\times(2-3\mathrm{i})}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}=\frac{2-3\mathrm{i}}{4+9}$ $\boxed{\frac{1}{2+3\mathrm{i}}=\frac{2}{13}-\frac{3}{13}\mathrm{i}}$

b) $\frac{2}{1+\mathrm{i}}-\frac{3}{1-\mathrm{i}}=\frac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}-\frac{3(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{2-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}^2}-\frac{3+3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}^2}=\frac{2-3-2\mathrm{i}-3\mathrm{i}}{1+1}$ $\boxed{\frac{2}{1+\mathrm{i}}-\frac{3}{1-\mathrm{i}}=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\mathrm{i}}$

c) $\frac{2+3\mathrm{i}}{5-2\mathrm{i}}=\frac{(2+3\mathrm{i})(5+2\mathrm{i})}{(5-2\mathrm{i})(5+2\mathrm{i})}=\frac{10+6\mathrm{i}^2+4\mathrm{i}+15\mathrm{i}}{25-4\mathrm{i}^2}=\frac{10-6+19\mathrm{i}}{25+4}$ $\boxed{\frac{2+3\mathrm{i}}{5-2\mathrm{i}}=\frac{4}{29}+\frac{19}{29}\mathrm{i}}$

Exercice 10 : $z=x+iy$, avec x et y réels. $Z=\frac{z-1}{z+1}$, avec $z\neq-1$.

$Z=\frac{x+iy-1}{x+iy+1}$ $Z=\frac{x-1+iy}{x+1+iy}$ $Z=\frac{(x-1+iy)(x+1-iy)}{(x+1+iy)(x+1-iy)}$

$Z=\frac{(x-1)(x+1)-\mathrm{i}^2y-iy(x-1)+iy(x+1)}{(x+1)^2+y^2}$ $Z=\frac{x^2-1+y^2+iy(-x+1+x+1)}{(x+1)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-1+2iy}{(x+1)^2+y^2}$

On a donc bien : $\boxed{Z=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}+\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}\mathrm{i}}$