Terminale S - 26 exercices sur le raisonnement par récurrence - Corrigés

Exercice 1.

* Initialisation ou amorce de la récurrence :

Pour $n=1$, on a : $n^2 = 1^2 = 1$

et $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1\times 2\times(2\times1+1)}{6} = \frac{2\times3}{6} = 1$

* HRn (Hypothèse de récurrence au rang n)

On part du fait que, pour un certain entier $n \geqslant 1$, on a :

$$1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{HRn}$$

* (Hérédité) Montrons qu'alors, on a :

j'ai ajouté le terme $(n+1)^2$

$$1^2+2^2+\dots+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

j'ai remplacé n par n+1 dans la formule

$$\underbrace{1^2+2^2+\dots+n^2}_{\text{d'après HRn}} + (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + (n+1)^2$$

donc $1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}$

$$= \frac{(n+1)}{6}\times\left(n(2n+1)+6(n+1)\right)$$

$$= \frac{(n+1)}{6}\times(2n^2+n+6n+6)$$

$$= \frac{(n+1)}{6}\times(2n^2+7n+6)$$

Ici, il me reste à prouver que $2n^2+7n+6 = (n+2)(2(n+1)+1)$

Pour cela, je développe le second membre et regarde si j'obtiens le premier.

$$\begin{aligned}(n+2)(2(n+1)+1) &= (n+2)(2n+2+1)\\ &= (n+2)(2n+3)\\ &= 2n^2+3n+4n+6\\ &= 2n^2+7n+6 \quad \text{ok !}\end{aligned}$$

J'ai donc montré que, si $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

alors $1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$

Conclusion : J'ai donc démontré par récurrence que : $\forall n \geqslant 1$:

$$1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Bien observer la manière dont on procède :

à un moment où l'on pose l'hypothèse de récurrence (HRn), tout ce que l'on sait, c'est qu'il existe un rang n (1 en l'occurrence) pour lequel elle est vraie.

Ce n'est qu'après avoir prouvé l'hérédité (que HRn $\Rightarrow$ HR$_{n+1}$) qu'on peut en déduire que la propriété est vraie pour tout n à partir du rang de l'amorce.

Terminale S - 26 exercices sur le raisonnement par récurrence - Corrigés

Exercice 2 : * Annonce - Au rang $n=1$

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = 1^3 = 1$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1\times 4}{4} = 1$$

} même résultat

On a bien, pour $n=1$, $1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $P(1)$ Vraie

* HRn : On suppose qu'il existe un rang $n \geqslant 1$, pour lequel on a : $\boxed{1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$ HRn

On suppose $P(n)$ Vraie pour un certain $n \geqslant 1$

* Montrons qu'alors, on a :

$$1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

j'ai ajouté le terme $(n+1)^3$

j'ai remplacé n par $n+1$ dans la formule.

$$\underbrace{1^3+2^3+\dots+n^3}_{\text{d'après HRn}}+(n+1)^3 = \underbrace{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}+(n+1)^3$$

Je factorise par $(n+1)^2$ $= (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4}+(n+1)\right]$

Je réduis le contenu des crochets au même dénominateur. $= (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4}+\frac{4(n+1)}{4}\right]$

$= (n+1)^2\left[\frac{n^2+4n+4}{4}\right]$

On reconnaît la première identité remarquable

Soit $1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ C.Q.F.D

Conclusion : Nous avons démontré par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

Il me reste à montrer que, $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = (1+2+\dots+n)^2$$

ou que $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1+2+\dots+n)^2$ ← on va montrer celle-ci

Ici, je n'ai pas besoin d'utiliser la récurrence. Il me suffit de me remémorer le résultat suivant :

Pour tout entier $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2 + \dots + n-1 + n \\ + \quad S_n &= n + (n-1) + \dots + 2 + 1 \\ \hline 2S_n &= \underbrace{(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)+(n+1)}_{n \text{ termes}} \end{aligned}$$

Donc $S_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$(1+2+3+\dots+n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \quad \text{car } (ab)^n = a^n b^n \text{ et } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

C.Q.F.D

Ici, on a fait une démonstration directe : pour tout n d'emblée - Pas une démonstration par récurrence.

Exercice 3 : * Amorce : au rang $n=1$:

$1 \times 2 = 2$

$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{1\times(1+1)(1+2)}{3} = \frac{1\times2\times3}{3} = 2$

* Hypothèse de récurrence au rang $n \geq 1$: HR_n

On suppose qu'au rang n (n étant supérieur ou égal à 1), on a l'égalité :

HR_n $\boxed{1\times2 + 2\times3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$

* Hérédité : On cherche à montrer qu'alors, on a :

$1\times2 + 2\times3 + \cdots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

↑ Ici, on ajoute un terme

↑ dans ce membre, on remplace n par $n+1$. $n+1$ devient alors $n+2$ et $n+2$ devient $n+3$

Je pars du premier membre :

$\underbrace{1\times2 + 2\times3 + \cdots + n(n+1)}_{\text{égale d'après } HR_n} + (n+1)(n+2) = \underbrace{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}_{} + \frac{(n+1)}{\times}(n+2)$

Je poursuis le calcul du 2nd membre :

$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \underset{\times 1}{(n+1)(n+2)} = (n+1)(n+2)\left[\frac{n}{3} + 1\right]$

$= (n+1)(n+2)\left[\frac{n}{3} + \frac{3}{3}\right]$

D'où : $1\times2 + 2\times3 + \cdots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

C.Q.F.D

Conclusion : Ainsi, on a démontré par récurrence que, pour tout $n \geq 1$:

$\boxed{1\times2 + 2\times3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$

Exercice 4 : (u_n) est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) $u_0 = 0$

$u_1 = \sqrt{1+u_0^2} = \sqrt{1+0^2} = \sqrt{1} = 1$

$u_2 = \sqrt{1+u_1^2} = \sqrt{1+1^2} = \sqrt{2}$

$u_3 = \sqrt{1+u_2^2} = \sqrt{1+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

$u_4 = \sqrt{1+u_3^2} = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

2) Conjecture : Il semblerait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n}$.

3) * Amorce : $u_0 = 0 = \sqrt{0}$

→ la propriété $u_n = \sqrt{n}$ est vraie au rang $n=0$

* HR_n : On suppose que, pour un certain rang $n \geq 0$, on a : $u_n = \sqrt{n}$

* Hérédité : Prouvons qu'alors, on a $u_{n+1} = \sqrt{n+1}$

Par hypothèse : $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$

D'après HR_n, on a alors : $u_{n+1} = \sqrt{1+(\sqrt{n})^2}$

Suite de l'exercice 4 : Comme n est un entier naturel, c'est un nombre positif. On a donc $(\sqrt{n})^2 = n$

D'où $u_{n+1} = \sqrt{1+n}$ ou encore $\sqrt{n+1}$ C.Q.F.D

Conclusion : On a prouvé que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n}$

Exercice 5 : Hypothèse : La suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{4+(u_n)^2} \end{cases}$$

1) $u_0 = 0$
$u_1 = \sqrt{4+(u_0)^2} = \sqrt{4+0^2} = \sqrt{4} = 2$
$u_2 = \sqrt{4+(u_1)^2} = \sqrt{4+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ $(= 2\sqrt{2})$
$u_3 = \sqrt{4+(u_2)^2} = \sqrt{4+(\sqrt{8})^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12}$ $(= 2\sqrt{3})$
$u_4 = \sqrt{4+(u_3)^2} = \sqrt{4+(\sqrt{12})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16}$ $(= 2\sqrt{4})$

2) Je remarque que : $0 \xrightarrow{+4} 4 \xrightarrow{+4} 8 \xrightarrow{+4} 12 \xrightarrow{+4} 16$

Je conjecture : il se pourrait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_n = \sqrt{4n}$ ou $u_n = 2\sqrt{n}$

Ce qui est la même chose car $\sqrt{4n} = \sqrt{4}\sqrt{n} = 2\sqrt{n}$

3) * **Initialisation :** Au rang $n = 0$, on a :
$u_0 = 0$
et $\sqrt{4n} = \sqrt{4\times 0} = 0$
→ la conjecture se vérifie bien au rang 0.

* **HRn :** On suppose qu'à un certain rang $n \geq 0$, on a : $u_n = \sqrt{4n} = 2\sqrt{n}$

* Montrons qu'alors, on a : $u_{n+1} = \sqrt{4(n+1)}$ ou $2\sqrt{n+1}$

Par hypothèse, on sait que : $u_{n+1} = \sqrt{4+(u_n)^2}$

D'après HRn, on en déduit que : $u_{n+1} = \sqrt{4+(\sqrt{4n})^2}$

Soit $u_{n+1} = \sqrt{4+4n}$ puisque $4n \geq 0$

Soit $u_{n+1} = \sqrt{4(n+1)}$ ou encore $2\sqrt{n+1}$ C.Q.F.D

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{4n} = 2\sqrt{n}$

Exercice 6 : **Hypothèse :** (u_n) est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = -2u_n + 9 \end{cases}$$

Nous souhaitons montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-2)^n + 3$

* **Initialisation :** au rang $n = 1$
$u_1 = 1$
$(-2)^1 + 3 = -2 + 3 = 1$ } on a bien $u_1 = (-2)^1 + 3$

* **HRn :** On suppose qu'à un certain rang $n \geq 1$, on a $u_n = (-2)^n + 3$

* Montrons qu'alors, $u_{n+1} = (-2)^{n+1} + 3$

Corrigés.

Suite de l'exercice 6 : Par hypothèse, on sait que :

$$u_{n+1} = -2u_n + 9$$

Donc $u_{n+1} = -2\underbrace{[(-2)^n + 3]}_{u_n \text{ d'après l'hypothèse de récurrence } HA_n} + 9$

Soit $u_{n+1} = -2(-2)^n - 2\times 3 + 9$

$= (-2)^{n+1} - 6 + 9$

$= (-2)^{n+1} + 3$ C.Q.F.D

Conclusion : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = (-2)^n + 3$

Exercice 7 : Hypothèses : * la suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 & (H_1) \\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = 2u_n - 1 & (H_2) \end{cases}$$

* la suite (v_n) est définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 & (H_3) \\ \forall n \geqslant 0,\ v_{n+1} = 2v_n + 3 & (H_4) \end{cases}$$

1) a) On veut montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = 2^{n+1} + 1$

* Au rang $n = 0$, on a $u_0 = 3$ d'après (H_1)

et $2^{0+1} + 1 = 2^1 + 1 = 3$

Donc on a bien $u_0 = 2^{0+1} + 1$

→ le résultat est vrai.

Je note "R" comme "résultat", mais vous pouvez nommer les résultats prouvés comme bon vous semble.

* Hypothèse de récurrence HA_n : On suppose que, pour un certain rang $n \geqslant 0$, on a $u_n = 2^{n+1} + 1$

* Montrons qu'alors, on a aussi : $u_{n+1} = 2^{n+2} + 1$

car $(n+1)+1 = n+2$

D'après (H_2), on a : $u_{n+1} = 2u_n - 1$

D'après HA_n, on a alors : $u_{n+1} = 2(2^{n+1} + 1) - 1$

Soit $u_{n+1} = 2\times 2^{n+1} + 2 - 1$

Soit $u_{n+1} = 2^{n+2} + 1$ C.Q.F.D

Conclusion : $\forall n \geqslant 0$, $\boxed{u_n = 2^{n+1} + 1.}$ (R_1)

b) On souhaite prouver que, $\forall n \geqslant 0$, $2u_n - v_n = 5$

* Au rang $n = 0$: $2u_0 - v_0 = 2\times 3 - 1$ d'après (H_1) et (H_3)

Donc $2u_0 - v_0 = 6 - 1 = 5$

→ l'égalité est vraie.

* HA_n : On suppose qu'il existe un rang $n \geqslant 0$ auquel on a : $2u_n - v_n = 5$

* Montrons qu'alors, on a aussi : $2u_{n+1} - v_{n+1} = 5$

D'après (H_2) et (H_4), on a :

$2u_{n+1} - v_{n+1} = 2(2u_n - 1) - (2v_n + 3)$

Corrigés.

Suite de l'exercice 7. Question 1b

Donc $2u_{n+1} - v_{n+1} = 4u_n - 2 - 2v_n - 3$
$= 4u_n - 2v_n - 5$
$= 2(2u_n - v_n) - 5$
$2u_n - v_n = 5$ d'après HR_n

Donc $2u_{n+1} - v_{n+1} = 2 \times 5 - 5 = 10 - 5$
$= 5$ C.Q.F.D

Conclusion: Pour tout $n \geqslant 0$, on a: $\boxed{2u_n - v_n = 5}$ (R_2)

2) Pour tout $n \geqslant 0$, on a, d'après (R_2):

$2u_n - v_n = 5 \iff -v_n = -2u_n + 5$
$\iff v_n = 2u_n - 5$

Or, d'après (R_1), on sait que $\forall n \geqslant 0$, $u_n = 2^{n+1} + 1$

Donc $\forall n \geqslant 0$, $v_n = 2(2^{n+1} + 1) - 5$
$= 2^{n+2} + 2 - 5$
$\boxed{v_n = 2^{n+2} - 3}$

Exercice 8: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$

1) On souhaite prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$

* Pour rang $n = 1$: le membre de gauche vaut 1
le membre de droite vaut: $(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1 \times 2 - 1 = 1$

→ Donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

* HR_n: On suppose qu'il existe un rang $n \geqslant 1$ pour lequel on a: $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$

* Montrons qu'alors, on a:

$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)! = (n+2)! - 1$

D'après HR_n, je peux remplacer $1 + 2 \times 2! + \dots + n \times n!$ par $(n+1)! - 1$

J'ai donc: $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n \times n! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$
$= (n+1)! + (n+1)(n+1)! - 1$
$= (n+1)!(1 + n + 1) - 1$
$= (n+1)!(n+2) - 1$
$= (n+2)! - 1$
C.Q.F.D

Comprendre que $(n+2)! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n \times (n+1) \times (n+2)$
$= (n+1)! \times (n+2)$

Conclusion: $\forall n \geqslant 1$, on a bien:

$\boxed{1 + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1}$

Exercice 9: (u_n) est la suite définie par:

$\begin{cases} u_0 = 1 & (H_1) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} & (H_2) \end{cases}$

Corrigé

Suite de l'exercice 9 : 1) * Au rang $n=0$: $u_0 = 1$ donc $u_0 > 0$

Il est vrai que u_n est strictement positif pour $n=0$

* HR$_n$: On suppose qu'à un certain rang $n \geqslant 0$, on a $u_n > 0$

* Montrons qu'alors, $u_{n+1} > 0$

D'après (H_2), $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

D'après HR$_n$, $u_n > 0$

donc $u_n + 1 > 1$

donc $\sqrt{u_n + 1} > \sqrt{1}$

je compose ici par la fonction racine carrée qui est strictement croissante donc conserve l'ordre sur $[0;+\infty[$

et mes vidéos :

→ les 6 règles sur l'ordre, pour calculer avec des inégalités.

ou → Résumé des règles sur l'ordre, pour calculer avec des inégalités.

donc $\sqrt{u_n + 1} > 1 > 0$ donc $u_{n+1} > 0$ C.Q.F.D

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2) * Au rang $n=0$: $u_0 = 1$

$u_1 = \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} > 1$ car $\sqrt{2} > \sqrt{1}$ puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Donc $u_1 > u_0$

→ Au rang $n=0$, on a bien $u_{n+1} > u_n$

HR$_n$ * On suppose qu'à un certain rang $n \geqslant 0$, on a $u_{n+1} > u_n$

* Montrons qu'alors, on a aussi : $u_{n+2} > u_{n+1}$

D'après HR$_n$, on a : $u_{n+1} > u_n$

donc $u_{n+1} + 1 > u_n + 1$ (+1)

donc $\sqrt{u_{n+1} + 1} > \sqrt{u_n + 1}$ ($\sqrt{\ }$)

Car la fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et on sait que $u_{n+1} + 1$ et $u_n + 1$ sont bien dans cet intervalle car on a montré à la question 1) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

$\sqrt{u_{n+1} + 1} > \sqrt{u_n + 1}$ soit $u_{n+2} > u_{n+1}$ C.Q.F.D

d'après l'hypothèse (H_2)

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$, ce qui traduit le fait que la suite (u_n) est strictement croissante (à partir du rang $n=0$)

3) * Au rang $n=0$, il est vrai que $u_n < 2$, puisque $u_0 = 1$ d'après (H_1).

* HR$_n$: On suppose qu'à un certain rang $n \geqslant 0$, $u_n < 2$.

* Montrons qu'alors, $u_{n+1} < 2$.

Suite de l'exercice 3, question 3.

$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ d'après (H_2)

et : $u_n < 2$ d'après HR n

$u_n < 2 \iff u_n + 1 < 3$

$\iff \sqrt{u_n + 1} < \sqrt{3}$

Car la fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et car $u_n + 1$ et 3 sont bien dans cet intervalle puisqu'on a montré en 1) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc $u_n + 1 > 1 > 0$.

Or $\sqrt{3} < 2$ car $2 = \sqrt{4}$: $3 < 4$ donc $\sqrt{3} < \sqrt{4}$

On a donc bien $\sqrt{u_n + 1} < 2$ C.Q.F.D (u_{n+1})

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$

Exercice 2 : (v_n) est définie par : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + 2n + 2 \end{cases}$ (H_1) (H_2)

On voudrait savoir si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n(n+1)$

* Voyons si c'est vrai au rang $n = 0$

$n \times (n+1) = 0 \times (0+1) = 0 = v_0$ d'après (H_1)

→ Au rang 0, il est vrai que $v_n = n(n+1)$

* HR n : On suppose qu'il existe un rang $n \geq 0$ pour lequel on a : $v_n = n(n+1)$

* Voyons maintenant si on peut en déduire que cette égalité est vraie au rang $n+1$: essayons de prouver que $v_{n+1} = (n+1)(n+2)$

On sait d'après (H_2) que : $v_{n+1} = v_n + 2n + 2$

D'après HR n, on a donc : $v_{n+1} = n(n+1) + 2n + 2$

$= n(n+1) + 2(n+1)$

$= (n+2)(n+1)$

$= (n+1)(n+2)$

Conclusion : l'affirmation « Si la suite (v_n) est définie pour $v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 2n + 2$, alors $v_n = n(n+1)$ pour tout entier $n \geq 0$ » est VRAIE.

Exercice 11 : (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \end{cases}$ (H_1) (H_2)

* Au rang $n = 0$, on a : $u_0 = 1$ d'après (H_1)

$n^2 = 0^2 = 0$

$1 > 0$ donc $u_0 \geq 0^2$

→ la propriété $u_n \geq n^2$ est vraie.

* HR n : On suppose qu'à un certain rang $n \geq 0$, on a la propriété : $u_n \geq n^2$

Corrigés

* Montrons qu'alors, on a $u_{n+1} \geqslant (n+1)^2$

D'après (H_2), $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$

et d'après HR_n, $u_n \geqslant n^2$

donc $u_{n+1} \geqslant n^2 + 2n + 1$

Afin finalement besoin de détailler :

$u_n \geqslant n^2$

donc $u_n + 2n + 1 \geqslant n^2 + 2n + 1$

soit $u_{n+1} \geqslant n^2 + 2n + 1$

soit $u_{n+1} \geqslant (n+1)^2$ d'après la 1ère identité remarquable. C.Q.F.D

$(n+1)^2 = n^2 + 2 \times n \times 1 + 1^2 = n^2 + 2n + 1$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n^2$

Exercice 12 : (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 2 & (H_1) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5} & (H_2) \end{cases}$

* Au rang $n = 0$: $u_0 = 2$ d'après (H_1)

et $2 \leqslant 2 < 3$

donc $2 \leqslant u_0 < 3$

→ la propriété $2 \leqslant u_n < 3$ est vraie.

* HR_n : On suppose qu'à un certain rang $n \geqslant 0$, on a : $2 \leqslant u_{n+1} < 3$

* Montrons qu'alors, on a : $2 \leqslant u_{n+1} < 3$

D'après (H_2), $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$

Or, d'après HR_n, $2 \leqslant u_n < 3$

$+5$: $7 \leqslant u_n + 5 < 8$ $+5$

$\sqrt{\ }$: $\sqrt{7} \leqslant \sqrt{u_n + 5} < \sqrt{8}$ $\sqrt{\ }$

car la fonction racine carrée est strictement croissante donc conserve l'ordre sur $[0; +\infty[$, l'intervalle dans lequel se trouvent les 3 membres de l'encadrement.

Il me reste à comparer $\sqrt{7}$ à 2 et $\sqrt{8}$ à 3.

$2 = \sqrt{4}$ $\quad 4 < 7$ donc $\sqrt{4} < \sqrt{7}$

→ on a donc $2 < \sqrt{7}$

$3 = \sqrt{9}$ $\quad 8 < 9$ donc $\sqrt{8} < \sqrt{9}$

→ on a donc $\sqrt{8} < 3$

On a donc : $2 < \sqrt{7} \leqslant \underbrace{\sqrt{u_n + 5}}_{u_{n+1}} < \sqrt{8} < 3$

et par conséquent $2 \leqslant u_{n+1} < 3$ C.Q.F.D

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2 \leqslant u_n < 3$.

Corrigés

Exercice 13. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} & (H_1) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 & (H_2) \end{cases}$

* Au rang $n=0$: $u_0 = \frac{1}{2}$ d'après (H_1)

et on a bien : $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} < 1$

soit $\frac{1}{2} \leqslant u_0 < 1$

→ La propriété $\frac{1}{2} \leqslant u_n < 1$ est vraie pour $n=0$.

* HR$_n$: On suppose qu'à un certain rang $n \geqslant 0$, on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n < 1$$

* Montrons qu'alors : $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} < 1$.

D'après (H_2) : $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$

et d'après HR$_n$: $\frac{1}{2} \leqslant u_n < 1$

Méthode : Je cherche à encadrer $u_n^2 - u_n + 1$

Voici ma vidéo : Application des règles sur l'ordre à des encadrements

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n < 1$$

donc $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant u_n^2 < 1$

soit $\frac{1}{4} \leqslant u_n^2 < 1$

car la fonction carré est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$

On a ainsi : $\frac{1}{2} \leqslant u_n < 1$ donc $-\frac{1}{2} \geqslant -u_n > -1$

Lorsqu'on passe à l'opposé, on multiplie tous les membres par -1, donc on change le sens de l'inégalité !

soit $-1 < -u_n \leqslant -\frac{1}{2}$

Additionnons membre à membre les 2 encadrements :

$$\frac{1}{4} \leqslant u_n^2 < 1$$

et $\quad -1 < -u_n \leqslant -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{4} - 1 < u_n^2 - u_n < 1 - \frac{1}{2}$$

soit $-\frac{3}{4} < u_n^2 - u_n < \frac{1}{2}$

Je trouve utile de vous laisser dans le corrigé un essai de démarche classique qui n'a pas abouti, afin que vous constatiez qu'on ne gagne pas à tous les coups et qu'il faut parfois faire preuve de créativité pour contourner les obstacles.

(+1) donc $-\frac{3}{4} + 1 < u_n^2 - u_n + 1 < \frac{1}{2} + 1$

soit $\frac{1}{4} < u_n^2 - u_{n+1} < \frac{3}{2}$

ici → pas bon car $\frac{3}{2} < 1$

↓ pas bon car $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

→ échec de ma tentative de démonstration.

Je vais essayer en factorisant : $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$

$u_{n+1} = u_n(u_n - 1) + 1$

D'après HR$_n$: $\frac{1}{2} \leqslant u_n < 1$

(−1) donc $-\frac{1}{2} \leqslant u_n - 1 < 0$

⚠ Bien pourrais multiplier membre à membre, il est nécessaire que tous les membres soient positifs :

je passe donc à l'opposé : $\frac{1}{2} \geqslant -(u_n - 1) > 0$

en multipliant tous les membres par -1

Corrigés

Suite de l'exercice 13 : On a donc : $0 < -(u_n - 1) \leq \frac{1}{2}$.

Je multiplie membre à membre les 2 inégalités : j'ai le droit car tous les membres sont positifs. Voir les règles sur l'ordre.

$$\begin{array}{rl} & \frac{1}{2} \leq u_n < 1 \\ \times & 0 < -(u_n - 1) \leq \frac{1}{2} \end{array}$$

quand on multiplie membre à membre, l'inégalité stricte "gagne"

$$0 < -u_n(u_n - 1) < \frac{1}{2}$$

Ainsi je passe à l'opposé :

$$0 > u_n(u_n - 1) \geqslant -\frac{1}{2}$$

Soit $-\frac{1}{2} < u_n(u_n - 1) < 0$

donc $\frac{1}{2} < u_n(u_n - 1) + 1 < 1$

donc $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} < 1$ C.Q.F.D

je rétablis l'inégalité large, puisque si on a la stricte, alors la large est nécessairement vraie.

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a bien $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$.

Exercice 14 : (q_n) est définie par : $\begin{cases} q_1 = \frac{1}{3} & (H_1) \\ \forall n \geqslant 1,\ q_{n+1} = \frac{n+1}{3n} q_n & (H_2) \end{cases}$

* **Rang $n = 1$:** $q_n = q_1 = \frac{1}{3}$ d'après (H_1)

$\frac{n}{3^n} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$ Donc on a bien $q_n = \frac{n}{3^n}$

* **HR$_n$:** On suppose qu'à un certain rang $n \geqslant 1$, on a : $q_n = \frac{n}{3^n}$

* Montrons qu'alors, on a : $q_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$

D'après (H_2), $q_{n+1} = \frac{n+1}{3n} q_n$

D'après HR$_n$, on a donc : $q_{n+1} = \frac{n+1}{3n} \times \frac{n}{3^n}$

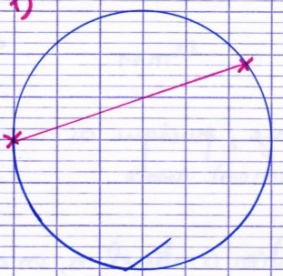
$= \frac{n+1}{3^{n+1}}$ C.Q.F.D

car $3 \times 3^n = 3^{n+1}$

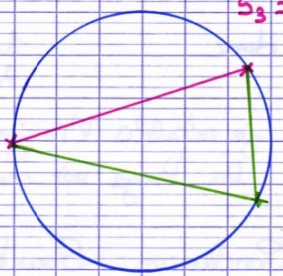
Conclusion : Pour tout $n \geqslant 1$, on a bien $q_n = \frac{n}{3^n}$

Exercice 15 : 1)

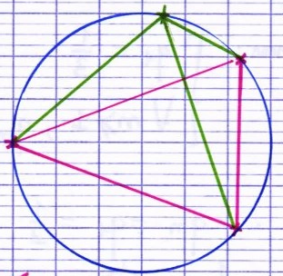
$S_2 = 1$



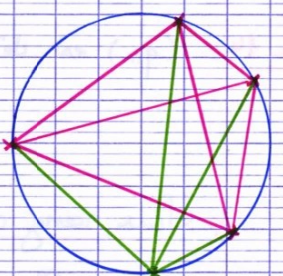
$S_3 = 1 + 2 = 3$ (3 = 2+1)



$S_4 = 3 + 3 = 6$ (3 = 4−1)



$S_5 = 6 + 4 = 10$ (4 = 5−1)



Corrigés

Suite de l'exercice 15. 2) On remarque que, lorsqu'on ajoute un $n^{ième}$ point sur le cercle, cela génère la création de $n-1$ segments supplémentaires pour le relier aux $n-1$ points déjà présents.

Ce qui donne la relation : $\forall n \geqslant 2$, $S_{n+1} = S_n + n$

ou $\forall n \geqslant 3$, $S_n = S_{n-1} + (n-1)$ qui revient au même.

On aura donc :

$S_2 = 1$

$S_3 = 1 + 2$

$S_4 = 1 + 2 + 3$

$S_5 = 1 + 2 + 3 + 4$

$\vdots$

$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$

$$\begin{array}{rcl} S_n &=& 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) \\ \oplus\ S_n &=& (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \\ \hline 2S_n &=& \underbrace{n + n + \cdots + n + n}_{n-1 \text{ termes}} \end{array}$$

cf la vidéo : 1ère - Suites arithmétiques 4 - Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Donc $\boxed{S_n = \dfrac{n(n-1)}{2} \quad \forall n \geqslant 2}$

↑ Voici ma conjecture

... Sauf que je trouve que j'ai déjà démontrée de manière directe en l'établissant.

3) * Au rang $n=2$: $S_n = S_2 = 1$, puisqu'un seul segment relie 2 points distincts.

et $\dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{2 \times (2-1)}{2} = 1$

→ la propriété $S_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ est vraie.

* HRn : On suppose qu'il existe un certain rang $n \geqslant 2$, on a : $S_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$

* Montrons qu'alors, $S_{n+1} = \dfrac{(n+1) \times n}{2}$

$S_{n+1} = S_n + n$ puisque le $(n+1)^{ième}$ point génère la création de n segments supplémentaires, le reliant aux n points existants.

D'après HRn, on a donc : $S_{n+1} = \dfrac{n(n-1)}{2} + n$

Soit $S_{n+1} = \dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{2n}{2}$

$= \dfrac{n(n-1) + 2n}{2}$

$= \dfrac{n(n-1+2)}{2}$

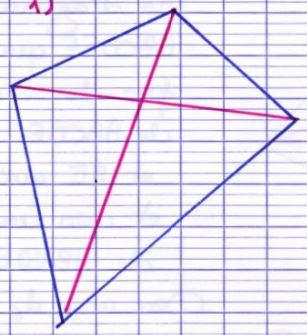
$S_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ C.Q.F.D

Conclusion : $\forall n \geqslant 2$, $S_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Corrigés.

Exercice 16

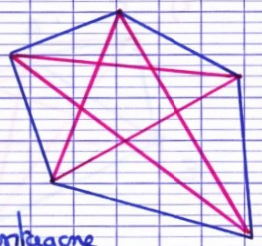
1)



Quadrilatère (polygone à 4 côtés)

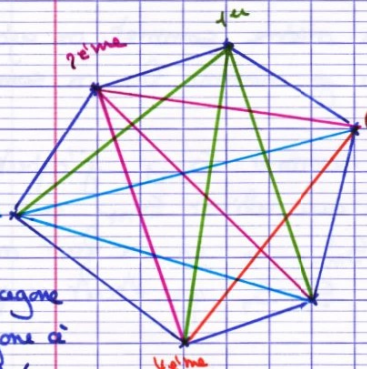
2 diagonales

$d_4 = 2$



Pentagone (polygone à 5 côtés)

$d_5 = 5$



Hexagone = polygone à 6 côtés et 6 sommets

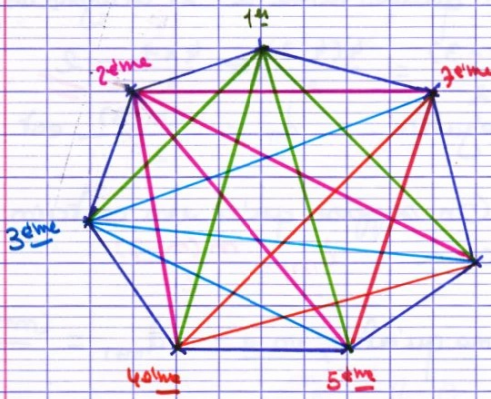
Je relie un 1er sommet aux 3 qui ne sont pas ses voisins

De même pour son voisin

J'ajoute 2 diagonales au départ du 3ème sommet, ne comptant pas celle qui le relie au 1er.

Je relie le 4ème au 6ème

$d_6 = 3 + 3 + 2 + 1 = 9$



Heptagone = polygone à 7 côtés

Je relie le 1er sommet à (7-3) autres → 4 diagonales

idem pour le 2ème

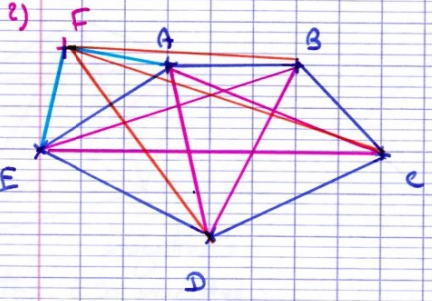
Je relie le 3ème sommet à 7-4 autres → 3 diagonales

Je relie le 4ème sommet à 7-5 autres → 2 diagonales

Je relie le 5ème sommet au 7ème : 7-6 = 1 diagonale

$d_7 = 4 + 4 + 3 + 2 + 1 = 14$

2)



Les diagonales de ABCDEF qui ne sont pas des diagonales de ABCDE sont FB, FC, FD et AE qui était un côté et non une diagonale de ABCDE.

Donc ici, $d_6 = d_5 + 4$

3) Quand on ajoute un nième sommet, on ajoute $n-2$ diagonales. Si je nomme les n sommets : $S_1, S_2, S_3 \dots S_n$.

Quand j'ajoute le sommet S_{n+1}, j'ajoute :

* les diagonales qui relient S_{n+1} aux sommets S_2 à S_{n-1} → ça en fait $n-2$
* la diagonale $S_n S_1$ qui était auparavant un côté.

On a donc $\forall n \geqslant 4$: $d_{n+1} = d_n + (n-1)$

4) * Au rang $n = 4$. $d_n = d_4 = 2$

car un quadrilatère a 2 diagonales.

Σ : $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{4(4-3)}{2} = \frac{4 \times 1}{2} = 2$

→ l'égalité $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ est vraie.

* HRn : On suppose qu'à un certain rang $n \geqslant 4$, on a $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$

* Montrons qu'alors, on a : $d_{n+1} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$

On remplace dans la formule n par $n+1$ et $n-3$ par $n+1-3 = n-2$

Corrigés.

Suite de l'exercice 16 - question 4.

On sait d'après la question 3) que $d_{n+1} = d_n + (n-1)$

HRn nous permet de remplacer d_n par $\frac{n(n-3)}{2}$, d'où :

$$d_{n+1} = \frac{n(n-3)}{2} + (n-1)$$

$$= \frac{n(n-3)}{2} + \frac{2(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2}$$

$$d_{n+1} = \frac{n^2 - n - 2}{2}$$

Or : $(n+1)(n-2) = n^2 - 2n + n - 2$

$= n^2 - n - 2$

Donc $d_{n+1} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$ C.Q.F.D

Conclusion : $\forall n \geq 4$, on a bien $\boxed{d_n = \frac{n(n-3)}{2}}$

Exercice 17 : (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 & (H_1) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} & (H_2) \end{cases}$

* Au rang $n=0$: $u_n = u_0 = 2$ d'après (H_1)

On a $1 \leq 2 \leq 2$, donc on a bien $1 \leq u_n \leq 2$ ($2 = u_0$)

* HRn : On suppose qu'à un certain rang $n \geq 0$, on a : $1 \leq u_n \leq 2$

* montrons qu'alors : $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

On sait d'après (H_2) que $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

et d'après HRn que $1 \leq u_n \leq 2$

donc $\sqrt{1} \leq \sqrt{u_n} \leq \sqrt{2}$

puisque la fonction racine carrée est strictement croissante donc conserve l'ordre sur $[0; +\infty[$.

soit $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{2}$

Or $\sqrt{2} < 2$ car $\sqrt{2} \approx 1{,}41$

Je peux aussi utiliser la théorème de comparaison : pour tout $a > 1$, on a $\sqrt{a} < a < a^2$.

D'où $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{2} < 2$

et par conséquent $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ C.Q.F.D

Conclusion : Pour tout $n \geq 0$, on a $1 \leq u_n \leq 2$.

ou pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 18 : (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 & (H_1) \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = 2u_n - n + 1 & (H_2) \end{cases}$

* Au rang $n=0$: $u_n = u_0 = 1$

et $1 \geq 0$ soit $u_n \geq n$

→ la propriété est vraie.

Corrigés

Suite de l'exercice 18 :

* HRn : On suppose qu'à un certain rang $n \geqslant 0$, on a $u_n \geqslant n$

* Montrons qu'alors, $u_{n+1} \geqslant n+1$.

D'après (H_2) : $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$

D'après HRn, $u_n \geqslant n$

$\times 2$: $2u_n \geqslant 2n$

$-n+1$: $2u_n - n + 1 \geqslant 2n - n + 1$

soit $u_{n+1} \geqslant n+1$ C.Q.F.D

Conclusion : Pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

Exercice 19 :

(u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 & (H_1) \\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 & (H_2) \end{cases}$

* Au rang $n=0$: $u_n = u_0 = 1$ d'après (H_1)

$n^2 = 0^2 = 0$

$1 \geqslant 0^2$ soit $u_n \geqslant n^2$

→ La propriété est vraie.

* HRn : On suppose qu'à un certain rang $n \geqslant 0$, on a : $u_n \geqslant n^2$

* Montrons qu'alors, $u_{n+1} \geqslant (n+1)^2$

$u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ d'après (H_2)

et $u_n \geqslant n^2$ d'après HRn

donc $u_n + 2n + 3 \geqslant n^2 + 2n + 3$

↓ C'est u_{n+1} ; à comparer à $(n+1)^2$

On a ici un petit raisonnement à faire en plus par rapport à l'exercice 11 :

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ d'après la 1ère identité remarquable

Or $n^2 + 2n + 1 < n^2 + 2n + 3$ puisque $1 < 3$

Par conséquent : $u_n + 2n + 3 \geqslant n^2 + 2n + 1$

Soit $u_{n+1} \geqslant (n+1)^2$ C.Q.F.D

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant n^2$.

Exercice 20 :

1) Pour $n=0$: $2^n = 2^0 = 1$ $\quad n^2 = 0^2 = 0$

donc $2^n > n^2$

Pour $n=1$: $2^n = 2^1 = 2$

$n^2 = 1^2 = 1$

Donc $2^n > n^2$

Pour $n=10$: $2^n = 2^{10} = 1024$

$n^2 = 10^2 = 100$

donc $2^n > n^2$

Pour $n=3$:

$2^n = 2^3 = 8$

$n^2 = 3^2 = 9$

ici, $2^n < n^2$ ← exception

→ Penser à faire tracer les courbes $y = 2^x$ et $y = x^2$ sur la calculatrice

Corrigé.

Suite de l'exercice 20. 2) Pour résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation (I) $2n^2 \geqslant (n+1)^2$, je résous d'abord dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I') $2x^2 \geqslant (x+1)^2$

(I') $\Leftrightarrow$ $2x^2 \geqslant x^2 + 2x + 1$

(I') $\Leftrightarrow$ $2x^2 - x^2 - 2x - 1 \geqslant 0$

(I') $\Leftrightarrow$ $x^2 - 2x - 1 \geqslant 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$

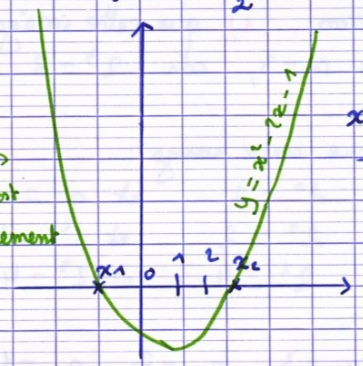
Le trinôme $x^2 - 2x - 1$ a 2 racines : $x_1 = \frac{-(-2) - 2\sqrt{2}}{2 \times 1}$

soit $x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2}$ soit $x_1 = 1 - \sqrt{2} < 0$

et $x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \simeq 2{,}4$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
x^2-2x-1		+	0	−	0	+	

$S' =]-\infty ; x_1] \cup [x_2 ; +\infty[$



Les solutions de (I) sont les entiers contenus dans S', c'est-à-dire tous les entiers supérieurs ou égaux à 3 → $S = [\![3 ; +\infty[\![$

3) * Pour $n = 4$: $2^n = 2^4 = 16$ et $n^2 = 4^2 = 16$

On a $2^n = n^2$

donc il est vrai que $2^n \geqslant n^2$

* HRn : On suppose qu'à un certain rang $n \geqslant 4$, on a : $2^n \geqslant n^2$

* Montrons qu'alors, $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$

On sait d'après HRn que $2^n \geqslant n^2$ (×2)

donc $2^{n+1} \geqslant 2n^2$

Et on a vu à la question 2) que, pour tout $n \geqslant 3$, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

On a donc : $2^{n+1} \geqslant 2n^2 \geqslant (n+1)^2$

d'où $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$ C.Q.F.D

Conclusion: pour tout $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$

4) On a vu question 1) que cette inégalité est fausse pour $n = 3$, car $2^3 = 8$ et $3^2 = 9$

Mais elle est vraie aux rangs :

0 car $2^0 = 1$ et $0^2 = 0$

1 car $2^1 = 2$ et $1^2 = 1$

et 2 car $2^2 = 4$ et $2^2 = 4$

Exercice 21

1) $a_0 = 1$ $a_1 = 1$ $a_2 = 3$ $a_3 = 7$ $a_4 = 13$ $a_5 = 21$ $a_6 = 31$

	+0		+2		+4		+6		+8		+10	
	1		1		3		7		13		21	31
	a_0		a_1		a_2		a_3		a_4		a_5	a_6

Corrigés.

Suite de l'exercice 21, question 1). On a donc :

$a_1 = a_0 + 0 \times 2$
$a_2 = a_1 + 1 \times 2$
$a_3 = a_2 + 2 \times 2$
⋮
$a_{n+1} = a_n + 2n$ → on suppose que c'est vrai pour tout $n \geqslant 0$.

formule de récurrence.

2) Nous allons essayer de montrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$, $a_n = n^2 - n + 1$

* Au rang $n = 0$: On sait par hypothèse que $a_0 = 1$

$n^2 - n + 1 = 0^2 - 0 + 1 = 1$ aussi

→ donc la propriété $a_n = n^2 - n + 1$ est vraie.

* HRn : On suppose qu'à un certain rang $n \geqslant 0$, on a : $a_n = n^2 - n + 1$

* Montrons qu'alors, on a : $a_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1$
$= n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1$
ce qu'on veut prouver → $= n^2 + n + 1$

D'après la formule de récurrence établie à la question 1), on a :

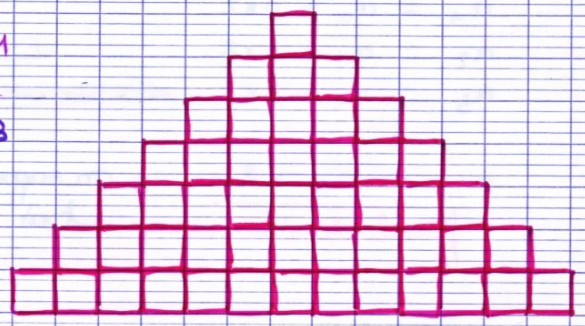
$a_{n+1} = a_n + 2n$

D'après HRn, on peut alors écrire : $a_{n+1} = n^2 - n + 1 + 2n$
$= n^2 + n + 1$
ici, on la prouve → C.Q.F.D

Conclusion : Pour tout $n \geqslant 0$, on a bien : $a_n = n^2 - n + 1$.

Exercice 22 :

1) étage 1
étage 2
étage 3
étage 4
étage 5
étage 6
étage 7



Si je note v_n le nombre de cubes à l'étage n, j'ai la relation de récurrence : $\forall n \geqslant 1$, $v_{n+1} = v_n + 2$ et le terme $v_1 = 1$.

(v_n) est une suite arithmétique de 1er terme $v_1 = 1$ et de raison 2.

$\forall n \geqslant 1$, $u_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

$u_1 = v_1 = 1 = 1^2$
$u_2 = v_1 + v_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$
$u_3 = v_1 + v_2 + v_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
$u_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
$u_5 = v_1 + \cdots + v_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$
$u_6 = v_1 + \cdots + v_6 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$
$u_7 = v_1 + \cdots + v_7 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 = 7^2$

Conjecture : Pour tout $n \geqslant 1$, on conjecture $u_n = n^2$

Suite de l'exercice 22 : 3) * Au rang $n=1$: $u_n = u_1 = 1$ et $n^2 = 1^2 = 1$

Donc on a bien $u_n = n^2$

* HRm : On suppose qu'à un certain rang $n \geqslant 1$, on a $u_n = n^2$

* Montrons qu'alors, on a $u_{n+1} = (n+1)^2$

$u_{n+1} = u_n +$ le nombre de cubes de la $(n+1)^{ième}$ rangée

$= n^2 + v_{n+1}$

↑ d'après HRm

(v_n) étant une suite arithmétique de 1er terme $v_1 = 1$ et de raison 2, on a :

$v_1 = 1$

$v_2 = 1+2$

$v_3 = 1+2\times 2$

$v_4 = 1+3\times 2$

⋮

$v_n = 1+(n-1)\times 2$

$v_{n+1} = 1+2n$

Voir la vidéo : 1ère - Suites arithmétiques 3 - Formule du terme général

D'où $u_{n+1} = n^2 + 1 + 2n$

$= n^2 + 2n + 1$

$= (n+1)^2$ C.Q.F.D

d'après la première identité remarquable.

Conclusion : On a montré par récurrence que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n = n^2$

Exercice 23 : a est un réel positif.

On veut prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(1+a)^n \geqslant 1+na$

* Au rang $n=1$. $(1+a)^n = (1+a)^1 = 1+a$

$1+na = 1+1\times a = 1+a$

On a : $(1+a)^n = 1+na$

Donc il est vrai que $(1+a)^n \geqslant 1+na$

* HRm : On suppose qu'à un certain rang $n \geqslant 1$, on a : $(1+a)^n \geqslant 1+na$

* Montrons qu'alors, on a : $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$

soit $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+a+na$

$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \times (1+a)$

d'après HRm, $(1+a)^n \geqslant 1+na$

$\times(1+a)$ ↓ donc $(1+a)^n \times (1+a) \geqslant (1+na)(1+a)$ ↓ $\times(1+a)$

car $1+a > 0$ puisque $a \geqslant 0$

soit $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+a+na+na^2$

na^2 est un nombre positif ou nul car $\begin{cases} n \geqslant 1 \\ a \geqslant 0 \end{cases}$

On a donc $1+a+na+na^2 \geqslant 1+a+na$

d'où $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+a+na$ C.Q.F.D

Conclusion : pour tout $n \geqslant 1$, on a bien $(1+a)^n \geqslant 1+na$

Corrigés

Exercice 24 : On souhaite démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6^n - 1$ est divisible par 5.

* *Au rang* $n = 0$: $6^n - 1 = 6^0 - 1 = 1 - 1 = 0$
  $0 = 0 \times 5$
  Il est vrai que $6^n - 1$ est divisible par 5

* *HRn* : On suppose qu'à un certain rang $n \geqslant 0$, $6^n - 1$ est divisible par 5.

* *Montrons qu'alors*, $6^{n+1} - 1$ est aussi divisible par 5.

  HRn nous informe que $6^n - 1$ est divisible par 5, soit qu'il existe un entier k tel que $6^n - 1 = 5k$, soit $6^n = 5k + 1$.

  $6^{n+1} = 6^n \times 6 = (5k+1) \times 6 = 30k + 6$

  Donc $6^{n+1} - 1 = 30k + 6 - 1$
  $= 30k + 5$
  $= 5(6k + 1)$
  ($6k+1$: entier naturel)

  k étant un entier naturel, $6k+1$ en est un aussi.

  Donc $6^{n+1} - 1$ est bien un multiple de 5
  = est divisible par 5. C.Q.F.D

Conclusion : Nous avons prouvé par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $6^n - 1$ est divisible par 5.

Exercice 25 : (x_n) et (y_n) sont définies par :

* $x_0 = 10$ (H_1) * $y_0 = 15$ (H_2)

* $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + 4y_n$ (H_3)

* $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = y_n + 9x_n$ (H_4)

1) $x_1 = x_0 + 4y_0$ d'après (H_3)
$= 10 + 4 \times 15$ d'après (H_1) et (H_2).
$x_1 = 70$

$y_1 = y_0 + 9x_0$ d'après (H_4)
$= 15 + 9 \times 10$ d'après (H_1) et (H_2).
$y_1 = 105$

2) On veut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier w_n tel que : $\begin{cases} x_n = 10 w_n \\ y_n = 15 w_n \end{cases}$

* *Au rang* $n = 0$: $x_0 = 10 = 10 \times 1$
$y_0 = 15 = 15 \times 1$
Donc il existe un entier $w_0 = 1$ tel que
$x_0 = 10 w_0$ et $y_0 = 15 w_0$

* *HRn* : On suppose qu'à un certain rang $n \geqslant 0$, il existe un entier w_n tel que $x_n = 10 w_n$ et $y_n = 15 w_n$.

* *Montrons qu'alors*, il existe un entier w_{n+1} tel que $x_{n+1} = 10 w_{n+1}$ et $y_{n+1} = 15 w_{n+1}$

Corrigés.

Suite de l'exercice 25 : question 2

$x_{n+1} = x_n + 4y_n$ d'après (H_3)

$= 10w_n + 4 \times 15 w_n$ d'après HR_n

$= 10 w_n + 60 w_n$

$= 70 w_n$

$= 10 \times (7 w_n)$

$y_{n+1} = y_n + 9 x_n$ d'après (H_4)

$= 15 w_n + 9 \times 10 w_n$ d'après HR_n

$= 15 w_n + 90 w_n$

$= 105 w_n$

$= 15 \times (7 w_n)$

HR_n nous informe que w_n est un entier.
Par conséquent, son multiple $7 w_n$ est aussi un entier.

Donc il existe bien un entier $w_{n+1} = 7 w_n$ tel que $x_{n+1} = 10 w_{n+1}$

et $y_{n+1} = 15 w_{n+1}$ C.Q.F.D

Conclusion : On a démontré par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un entier w_n tel que : $x_n = 10 w_n$ et $y_n = 15 w_n$.

3) On vient de voir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 7 w_n$.

(w_n) est donc une suite géométrique de raison 7.

Son premier terme est $w_0 = 1$ d'après le calcul "au rang $n=0$" de la question précédente.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 7^n$

car $w_1 = 7 \times w_0 = 7$ $w_2 = 7 w_1 = 7 \times 7$ etc...

4) On sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = 10 w_n$ et $y_n = 15 w_n$

D'où $x_5 = 10 w_5 = 10 \times 7^5 = 168\,070$

et $y_5 = 15 w_5 = 15 \times 7^5 = 252\,105$.

Exercice 26 :

a et b sont 2 réels tels que $0 < b \leq a$. (H_1)

(u_n) et (v_n) sont définies par :

$u_0 = a$ (H_2) $v_0 = b$ (H_3)

$\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ (H_4)

$\forall n \geq 0$, $v_{n+1} = \dfrac{2 u_n v_n}{u_n + v_n}$ (H_5)

1) On souhaite prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n \leq u_n$

* Au rang $n=0$: $u_n = u_0 = a$ d'après (H_2)
$v_n = v_0 = b$ d'après (H_3)
$0 < b \leq a$ d'après (H_1)
Donc on a bien $0 < v_n \leq u_n$

Corrigés

Suite de l'exercice 26, question 1 :

* HRn : On suppose qu'à un certain rang $n \geqslant 0$, on a : $0 < v_n \leqslant u_n$

* Montrons qu'alors, on a $0 < v_{n+1} \leqslant u_{n+1}$

Dans un premier temps, je vais montrer que v_{n+1} et u_{n+1} sont tous les deux positifs.

D'après (H_4), $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$

et comme, d'après HRn, $0 < v_n \leqslant u_n$, u_n et v_n sont tous deux strictements positifs donc u_{n+1} aussi.

D'après (H_5), $v_{n+1} = \dfrac{2 u_n v_n}{u_n + v_n}$.

D'après HRn et la règle des signes, $\boxed{v_{n+1} > 0}$ aussi.

Pour comparer u_{n+1} et v_{n+1}, je calcule la différence : d'après (H_4) et (H_5)

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2 u_n v_n}{u_n + v_n}$$

On peut remarquer que $u_n + v_n \neq 0$ car $u_n > 0$ et $v_n > 0$

$$= \frac{(u_n+v_n)(u_n+v_n)}{2 \times (u_n+v_n)} - \frac{2 u_n v_n \times 2}{(u_n+v_n) \times 2}$$

$$= \frac{(u_n+v_n)^2 - 4 u_n v_n}{2(u_n+v_n)}$$

$$= \frac{u_n^2 + 2 u_n v_n + v_n^2 - 4 u_n v_n}{2(u_n+v_n)}$$

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n^2 - 2 u_n v_n + v_n^2}{2(u_n+v_n)}$$

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n+v_n)}$$

$\geqslant 0$ car c'est un carré

> 0 car $u_n > 0$ et $v_n > 0$ d'après HRn

Donc $u_{n+1} - v_{n+1} \geqslant 0$

Soit $\boxed{u_{n+1} \geqslant v_{n+1}}$

En rassemblant les 2 résultats encadrés en jaune, on obtient : $0 < v_{n+1} \leqslant u_{n+1}$ C.Q.F.D

Conclusion : On a prouvé par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n \leqslant u_n$

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n$ d'après (H_4)

Soit $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \dfrac{2 u_n}{2}$

$$= \frac{u_n + v_n - 2 u_n}{2}$$

$$= \frac{v_n - u_n}{2} \leqslant 0 \text{ car } u_n \geqslant v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \iff u_{n+1} \leqslant u_n$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

Corrigés.

Suite de l'exercice 26 - question 2a.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - v_n$ d'après (H_S)

$= \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - \dfrac{v_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n}$

$= \dfrac{2u_n v_n - v_n u_n - v_n^2}{u_n + v_n}$

$= \dfrac{u_n v_n - v_n^2}{u_n + v_n}$

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{v_n(u_n - v_n)}{u_n + v_n}$

$v_n > 0$ $\quad u_n + v_n > 0$ car $0 < v_n \leqslant u_n$

et $u_n - v_n \geqslant 0$ car $v_n \leqslant u_n$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ soit $v_{n+1} \geqslant v_n$,
donc la suite (v_n) est croissante.

b) On a vu à la question 1) que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$

$= \dfrac{u_n - v_n}{2} \times \dfrac{u_n - v_n}{u_n + v_n}$ à comparer à 1.

On sait que $v_n > 0$ donc $u_n + v_n > u_n$

et $u_n - v_n < u_n$

par conséquent : $u_n - v_n < u_n < u_n + v_n$

donc $u_n - v_n < u_n + v_n$

donc $\dfrac{u_n - v_n}{u_n + v_n} < 1$

puisque $u_n + v_n > 0$ car $0 < v_n \leqslant u_n$

Et bien sûr, $0 \leqslant \dfrac{u_n - v_n}{u_n + v_n}$ ← + car $v_n < u_n$ ← + car $0 < v_n \leqslant u_n$

On a donc : $0 \leqslant \dfrac{u_n - v_n}{u_n + v_n} < 1$

(j'ai multiplié les 3 membres par $\frac{u_n - v_n}{2}$ qui est $\geqslant 0$)

donc $0 \leqslant \dfrac{u_n - v_n}{2} \times \dfrac{u_n - v_n}{u_n + v_n} \leqslant \dfrac{u_n - v_n}{2}$

soit $0 \leqslant u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n - v_n}{2}$

qui était le résultat à prouver. C.Q.F.D.

c) Nous procéderons ici à montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$u_n - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0)$

* Au rang $n = 0$: $u_n - v_n = u_0 - v_0$

et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

Donc on a : $u_n - v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^0 (u_0 - v_0)$

Donc il est vrai que $u_n - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0)$

* HRn : On suppose qu'à un certain rang n, on a :

$u_n - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0)$

* Montrons qu'alors, on a : $u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (u_0 - v_0)$

Suite de l'exercice 26 question 2-c.

On a vu à la question précédente que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{u_n - v_n}{2} = \frac{1}{2}(u_n - v_n)$$

D'après HRn, on sait que $u_n - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0)$

donc $\frac{1}{2}(u_n - v_n) \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0)$

soit $\frac{1}{2}(u_n - v_n) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (u_0 - v_0)$

donc $u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(u_n - v_n) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (u_0 - v_0)$

donc $u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (u_0 - v_0)$

C.Q.F.D

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0)$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n v_n$

donc $w_{n+1} = u_{n+1} v_{n+1}$

$$= \frac{u_n + v_n}{2} \times \frac{2 u_n v_n}{u_n + v_n}$$

d'après (H_4) et (H_5)

$$= u_n v_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad w_{n+1} = w_n$

→ Donc (w_n) est une suite constante.

(toujours égale à ab)

L'exercice 26 est une partie d'un exercice qui m'a été donné en devoir en classe le 23 octobre 1992 en terminale C.
Je ne l'aurais pas fait soit parce que je n'aurais pas su le faire, soit parce que je n'aurais pas eu le temps de le traiter.