

I- Raisonnement par récurrence.

Le raisonnement par récurrence sert à prouver une propriété relative à un entier n pour tout n à partir d'un certain rang n_0 .

Exemple : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

On veut prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$.

* Amorce de la récurrence : on vérifie que la propriété est vraie pour le plus petit des entiers n , ici : 0

« Pour $n=0$, on a $u_0=0$ et $2^0-1=1-1=0$, donc on a bien $u_0=2^0-1$. »

* Hypothèse de récurrence au rang n : On suppose que la propriété que l'on souhaite démontrer pour tout n est vraie pour un certain n supérieur ou égal à celui de l'amorce :

« On suppose que, pour un certain rang $n \geq 0$, $u_n = 2^n - 1$. »

* Vérification de l'hérédité : On prouve que si l'hypothèse de récurrence est vraie, c'est-à-dire si la proposition est vraie au rang n , alors elle sera vraie aussi au rang $n+1$.

« On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

On sait aussi que, d'après l'hypothèse de récurrence, $u_n = 2^n - 1$.

Donc, en remplaçant dans l'expression de u_{n+1} , on obtient : $u_{n+1} = 2 \times (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$. »

On vient de démontrer que si $u_n = 2^n - 1$, alors $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$, c'est-à-dire que si la propriété que nous voulons montrer pour tout n est vraie au rang n , alors elle est vraie aussi au rang $n+1$.

Comme la propriété est vraie au rang $n=0$, et que si elle est vraie au rang n , alors elle l'est aussi au rang $n+1$, de proche en proche, elle est vraie pour tout entier n à partir de $n=0$.

Principe du raisonnement par récurrence : (axiome fondamental des mathématiques)

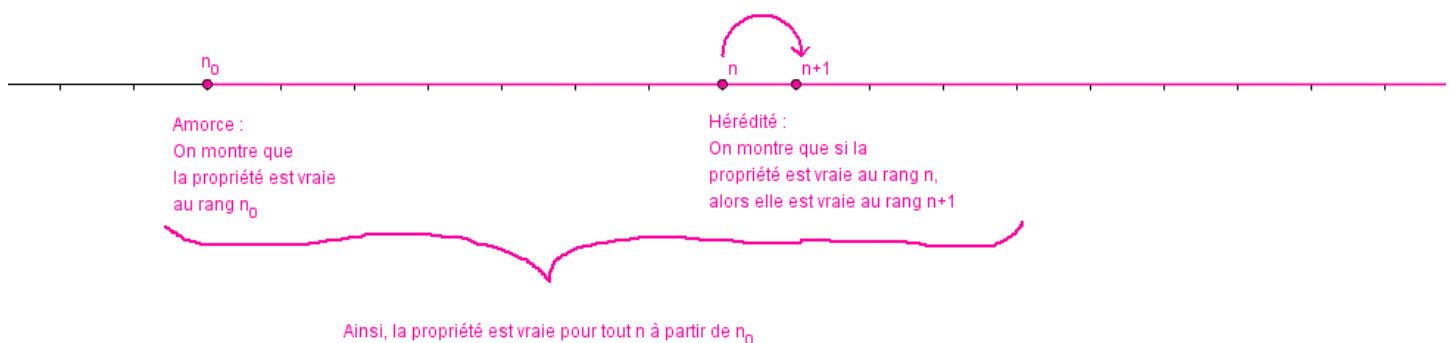
Pour prouver qu'une proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à un entier n_0 :

* On prouve qu'elle est vraie au rang n_0 .

* On suppose qu'elle est vraie pour un certain rang n supérieur ou égal à n_0 . (Hypothèse de récurrence)

* On prouve qu'alors, elle est vraie au rang $n+1$. (En utilisant l'hypothèse de récurrence)

* On conclut que la proposition est vraie pour tout n à partir de n_0 .



II- Limite d'une suite à l'infini.

1) Limite finie.

Définition 1 : On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite (finie) un réel L lorsque n tend vers $+\infty$

Lorsque pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que tous les termes de la suite (u_n) à partir du rang n_0 se situent dans l'intervalle $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$

C'est-à-dire que, pour tout $n \geq n_0$, $L-\varepsilon < u_n < L+\varepsilon$

Notation : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ (La limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$ est L)

Vocabulaire : Quand **une suite** a une limite finie, on dit qu'elle **converge**, ou qu'elle **est convergente**. Si cette limite est un réel L , on dit que la suite **converge vers L** , ou qu'elle **est convergente de limite L** . Une suite qui ne converge pas vers une limite finie L est dite **divergente**.

Propriété 1 : Si une suite (u_n) converge vers une limite L , alors cette limite est unique. (démonstration en exercice)

Propriété 2 : Limites des suites de référence :

Les suites (u_n) , (v_n) , (w_n) et (t_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{1}{n^2}$, $w_n = \frac{1}{n^3}$ et $t_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ convergent vers 0.

Démonstration pour (u_n) : Soit $\varepsilon > 0$.

Existe-t-il un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in]0-\varepsilon; 0+\varepsilon[$, soit $u_n \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, soit $-\varepsilon < u_n < \varepsilon$?

$$-\varepsilon < u_n < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ car, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, n > 0 \text{ donc } \frac{1}{n} > 0.$$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\varepsilon} < n$ car la fonction inverse est strictement décroissante (donc elle inverse l'ordre) et à valeurs positives sur l'intervalle $]0; +\infty[$

Il suffit de choisir pour n_0 un entier strictement supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, ainsi, pour tout $n \geq n_0$, $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ soit

$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$, soit $0 < u_n < \varepsilon$ donc $u_n \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. La suite (u_n) converge bien vers 0.

2) Limite infinie.

Définition 2 : On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (ou **diverge vers $+\infty$**) lorsque quel que soit le réel A que l'on choisisse, aussi grand qu'on le désire, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont supérieurs à A c'est-à-dire que $\forall n \geq n_0$, $u_n > A$. (c'est-à-dire $u_n \in]A; +\infty[$)

On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ (ou **diverge vers $-\infty$**) lorsque quel que soit le réel A que l'on choisisse, aussi proche de $-\infty$ qu'on le désire, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à A c'est-à-dire que $\forall n \geq n_0$, $u_n < A$. (c'est-à-dire $u_n \in]-\infty; A[$)



Certaines suites n'admettent pas de limite, on dit aussi qu'elles divergent. **Exemple :** $(-1)^n$.

Propriété 3 : Suites de référence.

Les suites (u_n) , (v_n) , (w_n) et (t_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n$, $v_n = n^2$, $w_n = n^3$, $t_n = \sqrt{n}$ divergent vers $+\infty$.

3) Théorèmes de comparaison.

Théorème 1 : (u_n) et (v_n) sont deux suites. Si, pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier n_0 (On dit aussi « à partir d'un certain rang ») :

- $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$



Démonstration exigible au baccalauréat :

- Soit A un réel quelconque.

On note p le rang à partir duquel tous les termes de u_n sont dans $]A; +\infty[$

On note n_0 le rang à partir duquel $u_n < v_n$.

On note N le plus grand des deux entiers p et n_0 .

Pour $n \geq N$, $u_n > A$ et $v_n \geq u_n$ dont $v_n > A$.

Il existe donc un rang N à partir duquel tous les termes de (v_n) sont dans $]A; +\infty[$

Ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

- Démonstration analogue avec un intervalle $]-\infty; A[$.

Théorème 2 : Théorème d'encadrement, appelé « théorème des gendarmes ». (admis)

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites.

Si, pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$,

et si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite L ,

alors (v_n) converge aussi vers L .

Autre notation : Si, pour tout n à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$,

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$.

III- Opérations sur les limites. (théorèmes admis)

1) Limite d'une somme.

Théorème 3 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques, et L et L' deux réels.

Si, quand n tend vers $+\infty$,

(u_n) a pour limite	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
(v_n) a pour limite	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

2) Limite d'un produit.

Théorème 4 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques, et L et L' deux réels.

Si, quand n tend vers $+\infty$,

(u_n) a pour limite	L	$L > 0$	$L < 0$	$L > 0$	$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
(v_n) a pour limite	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
Alors, $u_n \times v_n$ a pour limite	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

On peut, à la place, se référer à ce tableau plus simple mais qui suppose qu'on applique la règle des signes :

Si (u_n) a pour limite	L	$L \neq 0$	∞	0
et si (v_n) a pour limite	L'	∞	∞	∞
Alors, $u_n \times v_n$ a pour limite	$L \times L'$	∞	∞	?

3) Limite d'un quotient.

Théorème 5 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques, les termes de v_n étant non nuls, et L et L' deux réels.

Si, quand n tend vers $+\infty$,

(u_n) a pour limite	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	∞
(v_n) a pour limite	$L' \neq 0$	∞	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	0	∞
Alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?

En appliquant la règle des signes

Conseil : Retenir prioritairement les 4 formes indéterminées : $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

Les autres se devinent de manière intuitive.



ces 4 notations sont incorrectes et ne doivent jamais être écrites dans une copie.

IV- Limite d'une suite géométrique.

Théorème 7 :

- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$



Démonstration de la première partie exigible au baccalauréat :
 $q > 1$ donc il existe un réel $a > 0$ tel que $q = 1 + a$.

Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, q^n \geq 1 + na$.

- **Amorce :** $q^0 = 1$ $1 + 0 \times a = 1$, donc $q^0 \geq 1 + 0a$.
- **HRn :** On suppose que, pour un certain entier $n \geq 0$, on a $q^n \geq 1 + na$.
- Prouvons qu'alors $q^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$.

On sait d'après l'hypothèse de récurrence, que $q^n \geq 1 + na$. On sait aussi que $q > 1$.

On peut donc multiplier les deux membres de l'inégalité par q . On obtient :

$$q^n \geq 1 + na \Leftrightarrow q^n \times q \geq (1 + na) \times q \text{ et comme } q = 1 + a, \text{ on a } q^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a) .$$

En développant, on a donc : $q^{n+1} \geq 1 + na + a + na^2$, ou encore, $q^{n+1} \geq 1 + (n+1)a + na^2$.

Comme $n \geq 0$ et $a > 0$, $a^2 > 0$ et $na^2 \geq 0$, donc $q^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q^n \geq 1 + na$.

Comme $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} na = +\infty$ et aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + na = +\infty$.¹

D'après le théorème de comparaison, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Preuve de la seconde partie du théorème : si $-1 < q < 1$

- 1^{er} cas : $q=0$. (q^n) est une suite constante dont tous les termes sont égaux à 0. Sa limite est donc 0.
- 2^{ème} cas : $0 < q < 1$. On pose $p = \frac{1}{q}$. $0 < q < 1$ donc $\frac{1}{q} > 1$ puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. Donc $p > 1$.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} p^n = +\infty$ d'après la première partie du théorème, puisque $p > 1$.
Comme $q^n = \left(\frac{1}{p}\right)^n = \frac{1}{p^n}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p^n} = 0$
- 3^{ème} cas : $-1 < q < 0$. On pose $p = |q|$. (dans ce cas précis, on a $p = -q$)
 $0 < p < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p^n = 0$ d'après le cas précédent.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q^n = (-p)^n$, on a $q^n = -p^n$ si n est impair, et $q^n = p^n$ si n est pair.

Dans chacun des deux cas (n pair ou impair), on a donc $-p^n \leq q^n \leq p^n$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} -p^n = 0$ (limite d'un produit) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} p^n = 0$, d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

Remarque : Si $q=1$, la suite (q^n) est constante : ses termes sont tous égaux à 1, elle converge donc vers 1.

Si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite. Comme dans le cas $-1 < q < 0$, on a une suite alternée (si un terme est négatif, le suivant est positif et vice-versa), mais comme $(|q|^n)$ ne tend pas vers 0 – mais vers 1 si $q = -1$ ou vers $+\infty$ si $q < -1$, la suite diverge et n'a pas de limite (Remarque : la seule limite possible d'une suite alternée est 0).

De ce théorème, on déduit le comportement à l'infini des suites géométriques de raison q .

Exemples :

- Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $\sqrt{2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -5 \times (\sqrt{2})^n$.
 $\sqrt{2} > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -5(\sqrt{2})^n = -\infty$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_1 = 10$ et de raison $\frac{1}{2}$.
 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 10 \times 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 $-1 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 20 \times 0 = 0$.

¹ $(a)_n$ est une suite constante qui converge vers a et $(1)_n$ une suite constante qui converge vers 1. On applique ici les théorèmes opératoires sur la limite d'un produit et d'une somme !

Preuve de la limite d'une suite constante ? Soit (u_n) une suite constante à partir d'un certain rang, c'est-à-dire dire telle qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n = a$, a étant un réel constant.

Quel que soit $\varepsilon > 0$, à partir de $n = n_0$, on a $u_n \in]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$ puisque $u_n = a$ et que $a - \varepsilon < a < a + \varepsilon$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

V- Convergence des suites monotones.

Définition 3 : Suite majorée, minorée, bornée.

- On dit que (u_n) est une **suite majorée** s'il existe un nombre M tel que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
 M est appelé un **majorant** de la suite (u_n) .
- On dit que (u_n) est une **suite minorée** s'il existe un nombre m tel que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.
 m est appelé un **minorant** de la suite (u_n) .
- Une **suite** est **bornée** quand elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples :

- (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 4 - \sqrt{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ donc $\sqrt{n} \geq 0$ donc $-\sqrt{n} \leq 0$, donc $4 - \sqrt{n} \leq 4$.
 (u_n) est majorée par 4.
- (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = 3 - \frac{1}{n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1$, donc $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ d'après les variations de la fonction inverse sur $[1; +\infty[$

Théorème 8 : (admis) Théorème de convergence des suites monotones

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.

Remarque :  Ce n'est pas parce que M est un majorant d'une suite qu'il est sa limite !

Théorème 9 :

- Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$
- Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Preuve : Soit (u_n) une suite croissante.

Dire que (u_n) n'est pas majorée signifie que, pour tout réel A , il existe un entier N tel que $u_N > A$.

Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geq N$, $u_n > A$.

Donc pour tout réel A , il existe un entier N à partir duquel l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite. Cela signifie par définition que (u_n) a pour limite $+\infty$.

Remarques de logique :

La négation de « Il existe un réel M tel que, pour tout $\mathbb{N}, u_n \leq M$ » est « Pour tout réel M , il existe un rang N tel que $u_N > M$ ».

En règle générale, la négation de « Il existe au moins un machin tel que truc est vraie » est « Quel que soit machin, truc est fausse »

Exemple : La négation de « Il existe au moins un mouton noir en Écosse » est « Tous les moutons d'Écosse sont d'une autre couleur que le noir ».

Théorème 10 :

- Si une suite croissante (u_n) admet une limite finie L , alors L est un majorant de (u_n) .
- Si une suite décroissante (u_n) admet une limite finie L , alors L est un minorant de (u_n) .

Remarque : L est même le plus petit majorant (ou le plus grand minorant) de la suite, mais ça ne semble pas au programme.

Démonstration : (par l'absurde) Soit (u_n) une suite croissante de limite L .

Supposons que L ne soit pas un majorant de (u_n) , c'est-à-dire qu'il existe un rang N tel que $u_N > L$. Comme (u_n) est croissante, on a même, pour tout $n \geq N$, $u_n > L$.

Alors il existe $\varepsilon = \frac{u_N - L}{2}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \notin]L - \varepsilon; L + \varepsilon[$.

Cet intervalle ne contient donc qu'un nombre fini de termes de la suite.

Cela contredit que L en soit la limite (=pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0, u_n \in]L - \varepsilon; L + \varepsilon[$.)