Exercice 1 : $A=\ln 16=\ln 2^4$ $\boxed{A=4\ln 2}$ $B=\ln\frac{1}{32}=\ln\frac{1}{2^5}=\ln 2^{-5}$ $\boxed{B=-5\ln 2}$

$C=\frac{1}{2}\ln 16=\frac{1}{2}\times 4\ln 2$ $\boxed{C=2\ln 2}$ $D=-\ln 8=-\ln 2^3$ $\boxed{D=-3\ln 2}$

Exercice 2 : $A=\ln 1000=\ln(10^3)=3\ln 10=3\ln(2\times 5)=3(\ln 2+\ln 5)$ $\boxed{A=3\ln 2+3\ln 5}$

$B=\ln 500=\ln(5\times 5\times 2\times 5\times 2)=\ln(2^2\times 5^3)=\ln(2^2)+\ln(5^3)$ $\boxed{B=2\ln 2+3\ln 5}$

$C=\ln\frac{8}{25}=\ln\left(\frac{2^3}{5^2}\right)=\ln(2^3)-\ln(5^2)$ $\boxed{C=3\ln 2-2\ln 5}$

$D=\ln(0{,}025)=\ln\left(\frac{25}{1000}\right)=\ln\left(\frac{5^2}{10^3}\right)=\ln\left(\frac{5^2}{(2\times 5)^3}\right)=\ln\left(\frac{5^2}{2^3\times 5^3}\right)=\ln\left(\frac{1}{2^3\times 5}\right)=-\ln(2^3\times 5)=-\ln(2^3)-\ln 5$
$\boxed{D=-3\ln 2-\ln 5}$

Exercice 3 : *Rappel : pour prouver une égalité* $A=B$, *on peut transformer l'écriture de A pour obtenir B, transformer l'écriture de B pour obtenir A, ou encore calculer A et B à part et trouver une même expression C.*

a) $\ln(24)=\ln(8\times 3)=\ln 8+\ln 3=\ln 2^3+\ln 3=3\ln 2+\ln 3$, donc $\boxed{3\ln 2+\ln 3=\ln 24}$.

b) Pour prouver cette égalité, essayons d'exprimer chacun des deux membres en fonction de ln 2 :
Commençons par le second membre, le plus simple : $\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2^{-1}=-\ln 2$

Passons au premier membre : $2\ln\frac{1}{4}+3\ln 2=2\ln\frac{1}{2^2}+3\ln 2=2\ln(2^{-2})+3\ln 2=-4\ln 2+3\ln 2=-\ln 2$

On a bien : $\boxed{2\ln\frac{1}{4}+3\ln 2=\ln\frac{1}{2}}$

c) $2\ln 100-3\ln 10+\ln 1000=2\ln 10^2-3\ln 10+\ln 10^3=4\ln 10-3\ln 10+3\ln 10=4\ln 10$.
On a bien : $\boxed{2\ln 100-3\ln 10+\ln 1000=4\ln 10}$

Exercice 4 : $A=\frac{1}{2}\ln 25-2\ln 2=\frac{1}{2}\times\ln 5^2-2\ln 2=\ln 5-\ln 2^2=\ln\left(\frac{5}{2^2}\right)$ $\boxed{A=\ln\left(\frac{5}{4}\right)}$.

$B=\ln 32+\ln\frac{1}{3}-\ln 2$ $B=\ln\left(32\times\frac{1}{3}\div 2\right)$ $B=\ln\left(\frac{32}{3\times 2}\right)$ $\boxed{B=\ln\frac{16}{3}}$

Exercice 5 : a) $x=3\ln 2=\ln(2^3)=\ln 8$; $y=2\ln 3=\ln(3^2)=\ln 9$. $8<9$ et la fonction logarithme népérien est strictement croissante donc elle conserve l'ordre sur $]0;+\infty[$. Donc $\ln 8<\ln 9$, soit $\boxed{x<y}$.

b) $x=\ln 5-\ln 2=\ln\left(\frac{5}{2}\right)=\ln(2{,}5)$; $y=\ln 12-\ln 5=\ln\left(\frac{12}{5}\right)=\ln\left(\frac{24}{10}\right)=\ln(2{,}4)$.
Comme $2{,}4<2{,}5$ et comme la fonction ln est strictement croissante donc conserve l'ordre sur $]0;+\infty[$, $\ln(2{,}4)<\ln(2{,}5)$, donc $\boxed{y<x}$.

Exercice 6 : On sait que $\ln 3\approx 1{,}1$ et $\ln 5\approx 1{,}6$.

a) $\ln 27 = \ln 3^3 = 3\ln 3$, donc $\ln 27 \approx 3 \times 1{,}1$, soit $\boxed{\ln 27 \approx 3{,}3}$.

b) $\ln 15 = \ln(3 \times 5) = \ln 3 + \ln 5$. Donc $\ln 15 \approx 1{,}1 + 1{,}6$, soit $\boxed{\ln 15 \approx 2{,}7}$.

c) $\ln 45 = \ln(9 \times 5) = \ln(3^2 \times 5) = 2\ln 3 + \ln 5$. Donc $\ln 45 \approx 2 \times 1{,}1 + 1{,}6 = 2{,}2 + 1{,}6$, soit $\boxed{\ln 45 \approx 3{,}8}$.

Exercice 7 : On sait que $\ln 2 \approx 0{,}7$ et $\ln 7 \approx 1{,}9$.

a) $\ln 56 = \ln(8 \times 7) = \ln 8 + \ln 7 = \ln 2^3 + \ln 7 = 3\ln 2 + \ln 7$ Donc $\ln 56 \approx 3 \times 0{,}7 + 1{,}9 = 2{,}1 + 1{,}9$, $\boxed{\ln 56 \approx 4}$.

b) $\ln 3{,}5 = \ln\left(\frac{7}{2}\right) = \ln 7 - \ln 2$. Donc $\ln 3{,}5 \approx 1{,}9 - 0{,}7$, soit $\boxed{\ln 3{,}2 \approx 1{,}2}$.

c) $\ln 24{,}5 = \ln\left(\frac{49}{2}\right) = \ln\left(\frac{7^2}{2}\right) = 2\ln 7 - \ln 2$, donc $\ln 24{,}5 \approx 2 \times 1{,}9 - 0{,}7 = 3{,}8 - 0{,}7$, $\boxed{\ln 24{,}5 \approx 3{,}1}$.

Exercice 8 : a) $\ln e^5 - 2\ln e^2 = 5\ln e - 4\ln e = 5 \times 1 - 4 \times 1 = 5 - 4 = 1$. Donc $\boxed{\ln e^5 - 2\ln e^2 = 1}$.

b) $3\ln e^{-3} + \frac{1}{2}\ln e^{10} = 3 \times (-3)\ln e + \frac{1}{2} \times 10\ln e = -9 \times 1 + 5 \times 1 = -9 + 5 = -4$, donc $\boxed{3\ln e^{-3} + \frac{1}{2}\ln e^{10} = -4}$.

Exercice 9 : $A = \ln(e^{-5}) + 3e^{\ln 5} = -5\ln e + 3 \times 5 = -5 \times 1 + 15$ $\boxed{A = 10}$

$B = \frac{1}{2}\ln e^{0,5} - \ln e^{-4} = \frac{1}{2} \times 0{,}5\ln e + 4\ln e = \frac{1}{4} \times 1 + 4 \times 1 = \frac{1}{4} + 4$ $\boxed{B = 4{,}25}$ ou $\boxed{B = \frac{17}{4}}$.

$C = e^{\frac{1}{2}\ln 8 + 1} = e^{\ln\sqrt{8} + \ln e} = e^{\ln\sqrt{8} \times e}$ $\boxed{C = e\sqrt{8}}$ ou $\boxed{C = 2e\sqrt{2}}$.

$D = \frac{e^{2+\ln 2}}{e^{1-\ln 2}}$ Rappel : $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$. Donc $D = e^{2+\ln 2 - (1 - \ln 2)} = e^{1 + 2\ln 2} = e^{\ln e + \ln 2^2} = e^{\ln(e \times 4)}$, $\boxed{D = 4e}$.

$E = \frac{e^{2\ln 3}}{e^{3\ln 2}}$ $E = e^{2\ln 3 - 3\ln 2} = e^{\ln 3^2 - \ln 2^3} = e^{\ln\left(\frac{3^2}{2^3}\right)} = e^{\ln\frac{9}{8}}$ $\boxed{E = \frac{9}{8}}$.

Exercice 10 : $A = \ln\left(\frac{e^5}{e^3}\right) = \ln(e^{5-3}) = \ln(e^2)$ $\boxed{A = 2}$

$B = \ln\sqrt{e} - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ $B = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) - \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$ $B = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)$ $\boxed{B = 1}$

$C = \ln\left(\frac{e^3}{5}\right) + \ln 5 = \ln(e^3) - \ln 5 + \ln 5 = 3\ln e$ $\boxed{C = 3}$

$D = 2\ln 7 - \ln\left(\frac{49}{e^3}\right) = 2\ln 7 - [\ln 49 - \ln e^3] = 2\ln 7 - \ln 7^2 + 3 = 2\ln 7 - 2\ln 7 + 3$ $\boxed{D = 3}$

$E = e^{\ln 3 + 1} = e^{\ln 3 + \ln e} = e^{\ln(3e)}$ $\boxed{E = 3e}$

$F = e^{-\ln 2 + \ln 3} = e^{\ln 3 - \ln 2} = e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$ $\boxed{F = \frac{3}{2}}$

$G = 2\ln(\sqrt{2}+1) + \ln(-2\sqrt{2}+3)$ $G = \ln(\sqrt{2}+1)^2 + \ln(-2\sqrt{2}+3)$ $G = \ln(2+2\sqrt{2}+1) + \ln(-2\sqrt{2}+3)$

$G = \ln(3+2\sqrt{2}) + \ln(3-2\sqrt{2})$ $G = \ln[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})]$ $G = \ln[3^2 - (2\sqrt{2})^2]$

$G = \ln(9-8)$ $G = \ln 1$ $\boxed{G = 0}$

$H = \ln(\sqrt{7}) + \ln\left(2\sqrt{7} + \frac{3}{\sqrt{7}}\right)$ $H = \ln\left[\sqrt{7} \times \left(2\sqrt{7} + \frac{3}{\sqrt{7}}\right)\right]$ $H = \ln\left(2\times 7 + \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\right)$

$H = \ln(14+3)$ $\boxed{H = \ln 17}$

Exercice 11 : $\boxed{A(x) = e^{x - \ln(2x)}}$.

$A(x)$ est défini sur $]0;+\infty[$ car $\ln(2x)$ existe si et seulement si $2x > 0$ soit $x > 0$.

Pour tout x de $]0;+\infty[$, $A(x) = \frac{e^x}{e^{\ln(2x)}}$, soit $\boxed{A(x) = \frac{e^x}{2x}}$.

Remarque : a priori, $\frac{e^x}{2x}$ est défini sur $\mathbb{R}^*$, mais si on veut pouvoir l'écrire sous la forme $e^{x-\ln(2x)}$, il faut se restreindre à $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

$\boxed{B(x) = e^{x+\ln x} \times e^{\ln x - x}}$ $B(x)$ est définie pour $x > 0$, donc sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour tout x de $]0;+\infty[$, $B(x) = e^{x+\ln x + \ln x - x}$, $B(x) = e^{2\ln x} = e^{\ln(x^2)}$, $\boxed{B(x) = x^2}$.

A priori, x^2 est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais l'expression de départ de $B(x)$ nous oblige à nous restreindre à $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

$\boxed{C(x) = \frac{e^{\ln x + 1}}{e^{\ln x - 1}}}$. $C(x)$ est défini pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ afin que $\ln x$ soit défini. Le dénominateur $e^{\ln x - 1}$ est non-nul (et même strictement positif) dès lors que $\ln x$ est défini, puisque la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs strictement positives.

Pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, $C(x) = e^{\ln x + 1 - (\ln x - 1)}$, $\boxed{C(x) = e^2}$.

Exercice 12 : a) $\ln(e^x + 1) - x = \ln(1 + e^{-x})$

Le premier membre est défini sur $\mathbb{R}$, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $e^x + 1 > 1 > 0$. L'expression à l'intérieur du logarithme est bien strictement positive.

Le second membre est défini sur $\mathbb{R}$ aussi, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc $1 + e^{-x} > 1 > 0$.

Vérifions maintenant l'égalité :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(1+e^{-x}) = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right) = \ln(e^x+1) - \ln(e^x) = \ln(e^x+1) - x$.

On a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\ln(e^x+1) - x = \ln(1+e^{-x})}$.

b) $\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x - 1}\right) = \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)$.

Le premier membre est défini si et seulement si $e^x - 1 \neq 0$ (dénominateur non nul) et $\frac{1+e^x}{e^x-1} > 0$ (expression dans le logarithme strictement positive).

Le numérateur $1+e^x$ est strictement positif pour tout x réel. Donc $\dfrac{1+e^x}{e^x-1}$ est du signe de e^x-1.

Or $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante donc elle conserve l'ordre sur $\mathbb{R}$.

Remarque : $e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$. Le premier membre est donc défini pour $x>0$.

Le second membre, $\ln\left(\dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)$, est défini pour $1-e^{-x}\neq 0$ et pour $\dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}>0$.

$1-e^{-x}=0 \Leftrightarrow 1=e^{-x} \Leftrightarrow e^0=e^{-x} \Leftrightarrow 0=-x \Leftrightarrow x=0$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{-x}>0$ donc $1+e^{-x}>1>0$. $\dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$ est donc du signe de $1-e^{-x}$.

Or $1-e^{-x}>0 \Leftrightarrow 1>e^{-x} \Leftrightarrow e^0>e^{-x} \Leftrightarrow 0>-x \Leftrightarrow 0<x$.
Le second membre est donc lui aussi défini sur $]0;+\infty[$.

Prouvons maintenant l'égalité $\ln\left(\dfrac{1+e^x}{e^x-1}\right)=\ln\left(\dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

$\forall x\in\mathbb{R}^{+*}$, $\ln\left(\dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)=\ln\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{e^x}}{1-\dfrac{1}{e^x}}\right)=\ln\left(\dfrac{\dfrac{e^x+1}{e^x}}{\dfrac{e^x-1}{e^x}}\right)=\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{e^x-1}\right)$. L'égalité est vraie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 13 : f est la fonction définie par $f(x)=2\ln x+\ln(1-x)-\ln 2$

a) f est définie pour $x>0$ et $1-x>0$, soit pour $x>0$ et $1>x$, soit pour $x\in]0;1[$.
L'ensemble de définition de f est $]0;1[$.

b) Pour tout x de $]0;1[$, $f(x)=\ln(x^2)+\ln(1-x)-\ln 2=\ln\left(\dfrac{x^2(1-x)}{2}\right)$.

Donc pour tout x de $]0;1[$, $f(x)=\ln g(x)$ avec $g(x)=\dfrac{x^2(1-x)}{2}$.