Partie A : fonctions où apparaît seulement l'expression e^x .

Exercice 1 : Soient *f* et *g* les fonctions définies sur ℝ par $\boxed{f(x)=e^x+x^2}$ et $\boxed{g(x)=(x-2)e^x}$.

$\boxed{f'(x)=e^x+2x}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

$g(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=x-2$, $u'(x)=1$, et $v(x)=v'(x)=e^x$.
Donc $g'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=1\times e^x+(x-2)\times e^x=(1+x-2)e^x$ $\boxed{g'(x)=(x-1)e^x}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Soient *f* et *g* les fonctions définies sur ℝ par $\boxed{f(x)=3x^2-2e^x}$ et $\boxed{g(x)=(4-x^2)e^x}$.

$f'(x)=3\times 2x-2\times e^x$ $\boxed{f'(x)=6x-2e^x}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

$g(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=4-x^2$, $u'(x)=-2x$ et $v(x)=v'(x)=e^x$.
Donc $g'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=-2xe^x+(4-x^2)e^x$ $\boxed{g'(x)=(-x^2-2x+4)e^x}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Soient *f* et *g* les fonctions définies sur ℝ par $\boxed{f(x)=(x^2+3x+1)e^x}$ et $\boxed{g(x)=x^3e^x}$.

$f(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=x^2+3x+1$, $u'(x)=2x+3$ et $v(x)=v'(x)=e^x$.
Donc $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=(2x+3)e^x+(x^2+3x+1)e^x=(2x+3+x^2+3x+1)e^x$
Donc $\boxed{f'(x)=(x^2+5x+4)e^x}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

$g(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=x^3$, $u'(x)=3x^2$ et $v(x)=v'(x)=e^x$.
Donc $g'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=3x^2e^x+x^3e^x$ $\boxed{g'(x)=(x^3+3x^2)e^x}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

Exercice 4 : 1) f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\boxed{f(x)=\dfrac{e^x}{x}}$. (Remarque : valeur interdite : 0)

$f(x)$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=u'(x)=e^x$, $v(x)=x$ et $v'(x)=1$.

Donc $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}=\dfrac{e^x\times x-e^x\times 1}{x^2}$ $\boxed{f'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}}$ $\forall\ x\in\ ]0;+\infty[$.

2) g est la fonction définie sur ℝ par $\boxed{g(x)=\dfrac{x}{e^x}}$. (Remarque : pas de valeur interdite car $\forall\ x\in\mathbb{R},\ e^x>0$)

$g(x)$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=x$, $u'(x)=1$, et $v(x)=v'(x)=e^x$.

Donc $g'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}=\dfrac{1\times e^x-x\times e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{(1-x)e^x}{e^x\times e^x}$ $\boxed{g'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

Exercice 5 : 1) f est la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $\boxed{f(x)=\dfrac{e^x}{x+2}}$. (Remarque : valeur interdite : -2)

$f(x)$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=u'(x)=e^x$, $v(x)=x+2$ et $v'(x)=1$.

Donc $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}=\dfrac{e^x\times(x+2)-e^x\times 1}{(x+2)^2}=\dfrac{(x+2-1)e^x}{(x+2)^2}$

$\boxed{f'(x)=\dfrac{(x+1)\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}}$ $\forall\ x\in\,]-2;+\infty[$.

2) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{g(x)=\dfrac{x+2}{\mathrm{e}^x}}$.

$g(x)$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=x+2$, $u'(x)=1$ et $v(x)=v'(x)=\mathrm{e}^x$.

Donc $g'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}=\dfrac{1\times\mathrm{e}^x-(x+2)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}=\dfrac{(1-(x+2))\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^x}$ $\boxed{g'(x)=\dfrac{(-x-1)}{\mathrm{e}^x}}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

Exercice 6 : f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x}}$ et $\boxed{g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}}$.

$f(x)$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=\mathrm{e}^x+1$, $u'(x)=\mathrm{e}^x$ et $v(x)=v'(x)=\mathrm{e}^x$.

Donc $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}=\dfrac{\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^x-(\mathrm{e}^x+1)\times\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}=\dfrac{(\mathrm{e}^x-(\mathrm{e}^x+1))\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^x}=\dfrac{-1\times\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^x}$

Donc $\boxed{f'(x)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}$ ou $\boxed{f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

$g(x)$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=u'(x)=\mathrm{e}^x$, $v(x)=\mathrm{e}^x+1$ et $v'(x)=\mathrm{e}^x$.

Donc $g'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}=\dfrac{\mathrm{e}^x\times(\mathrm{e}^x+1)-\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{(\mathrm{e}^x+1-\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$

$\boxed{g'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

Partie B : fonctions où apparaît une expression de la forme $\mathrm{e}^{u(x)}$.

Dans les exercice 7 à 12, on factorisera au maximum les expressions obtenues.

Exercice 7 : f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x)=\mathrm{e}^{3x}+2}$ et $\boxed{g(x)=10\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}}$.

$f(x)$ est de la forme $\mathrm{e}^{u(x)}+2$ avec $u(x)=3x$ et $u'(x)=3$.
Donc $f'(x)=u'(x)\times\mathrm{e}^{u(x)}+0$ soit $\boxed{f'(x)=3\mathrm{e}^{3x}}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

$g(x)$ est de la forme $10\,\mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x)=-0{,}5\,x$ et $u'(x)=-0{,}5$.
Donc $g'(x)=10\,u'(x)\times\mathrm{e}^{u(x)}=10\times(-0{,}5)\times\mathrm{e}^{-0{,}5x}$ donc $\boxed{g'(x)=-5\mathrm{e}^{-0{,}5x}}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

Exercice 8 : Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x}}$ et $\boxed{g(x)=\mathrm{e}^{-x^2+x}}$.

$f(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)$ avec $\boxed{u(x)=x}$, $\boxed{u'(x)=1}$, et $\boxed{v(x)=\mathrm{e}^{-x}}$ donc $\boxed{v'(x)=-\mathrm{e}^{-x}}$.

Si trouver $v'(x)$ n'est pas immédiat pour vous, j'explique ici :
$v(x)$ est de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{U}(x)}$ avec $\mathrm{U}(x)=-x$ et $\mathrm{U}'(x)=-1$. Donc $v'(x)=\mathrm{U}'(x)\times\mathrm{e}^{\mathrm{U}(x)}=-1\times\mathrm{e}^{-x}=-\mathrm{e}^{-x}$.

Donc $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=1\times\mathrm{e}^{-x}+x\times(-\mathrm{e}^{-x})$, soit $\boxed{f'(x)=(1-x)\mathrm{e}^{-x}}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

$g(x)$ est de la forme $e^{u(x)}$ avec $\boxed{u(x)=-x^2+x}$ donc $\boxed{u'(x)=-2x+1}$.

Donc $g'(x)=u'(x)e^{u(x)}$ soit $\boxed{g'(x)=(-2x+1)e^{-x^2+x}}$.

Exercice 9 : Soient *f* et *g* les fonctions définies sur ℝ par $\boxed{f(x)=(2x-3)e^{-0,1x}}$ et $\boxed{g(x)=(5-0,1x)e^{2x}}$.

$f(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)$ avec $\boxed{u(x)=2x-3}$, $\boxed{u'(x)=2}$, $\boxed{v(x)=e^{-0,1x}}$ donc $\boxed{v'(x)=-0,1e^{-0,1x}}$.
(Même explication que pour le $v'(x)$ du f de l'exercice 8)

Donc $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=2e^{-0,1x}+(2x-3)\times(-0,1e^{-0,1x})=(2-0,2x+0,3)e^{-0,1x}$
Donc $\boxed{f'(x)=(-0,2x+2,3)e^{-0,1x}}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

$g(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)$ avec $\boxed{u(x)=5-0,1x}$, $\boxed{u'(x)=-0,1}$, $\boxed{v(x)=e^{2x}}$ et $\boxed{v'(x)=2e^{2x}}$.
Donc $g'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=-0,1e^{2x}+(5-0,1x)\times(2e^{2x})=(-0,1+10-0,2x)e^{2x}$
Donc $\boxed{g'(x)=(-0,2x+9,9)e^{2x}}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

Exercice 10 : Soient *f* et *g* les fonctions définies sur ℝ par $\boxed{f(x)=4xe^{-x+1}}$ et $\boxed{g(x)=3e^{1-x^2}}$.

$f(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)$ avec $\boxed{u(x)=4x}$, $\boxed{u'(x)=4}$, $\boxed{v(x)=e^{-x+1}}$ et $\boxed{v'(x)=-e^{-x+1}}$.

Donc $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=4e^{-x+1}+4x\times(-e^{-x+1})$ donc $\boxed{f'(x)=(4-4x)e^{-x+1}}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

ou encore $\boxed{f'(x)=4(1-x)e^{-x+1}}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$. Ou encore $\boxed{f'(x)=-4(x-1)e^{-x+1}}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

$g(x)$ est de la forme $3e^{u(x)}$ avec $\boxed{u(x)=1-x^2}$ et $\boxed{u'(x)=-2x}$.

Donc $g'(x)=3\times u'(x)\times e^{u(x)}=3\times(-2x)e^{1-x^2}$ donc $\boxed{g'(x)=-6xe^{1-x^2}}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

Exercice 11 : Soient *f* et *g* les fonctions définies sur ℝ par $\boxed{f(x)=(x^2+1)e^{-x}}$ et $\boxed{g(x)=e^{\frac{1-x}{2}}}$

$f(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)$ avec $\boxed{u(x)=x^2+1}$, $\boxed{u'(x)=2x}$, $\boxed{v(x)=e^{-x}}$ et $\boxed{v'(x)=-e^{-x}}$.

Donc $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=2xe^{-x}+(x^2+1)\times(-e^{-x})=(2x-x^2-1)e^{-x}$
Soit $\boxed{f'(x)=(-x^2+2x-1)e^{-x}}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

$g(x)$ est de la forme $e^{u(x)}$ avec $\boxed{u(x)=\frac{1-x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x}$ donc $\boxed{u'(x)=-\frac{1}{2}}$.

Donc $g'(x)=u'(x)e^{u(x)}=-\frac{1}{2}e^{\frac{1-x}{2}}$ soit $\boxed{g'(x)=-\frac{e^{\frac{1-x}{2}}}{2}}$ ou $\boxed{g'(x)=-\frac{1}{2}e^{\frac{1-x}{2}}}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

Exercice 12 : 1) f est la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $\boxed{f(x)=\exp\left(\frac{x-3}{x-1}\right)}$.

Soit $x\in\ ]1;+\infty[$. $f(x)$ est de la forme $e^{U(x)}$ avec $\boxed{\mathrm{U}(x)=\frac{x-3}{x-1}}$.

$U(x)$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $\boxed{u(x)=x-3}$, $\boxed{u'(x)=1}$, $\boxed{v(x)=x-1}$ et $\boxed{v'(x)=1}$.

Donc $U'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2}=\dfrac{1\times(x-1)-1\times(x-3)}{(x-1)^2}=\dfrac{x-1-x+2}{(x-1)^3}$ soit $\boxed{U'(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}}$.

Donc $f'(x)=U'(x)\times e^{U(x)}=\dfrac{2}{(x-1)^2}\times e^{\frac{x-3}{x-1}}$ soit $\boxed{f'(x)=\dfrac{2e^{\frac{x-3}{x-1}}}{(x-1)^2}}$ $\forall\ x\ \in\ ]1;+\infty[$.

2) g est la fonction définie sur ℝ par $\boxed{g(x)=\dfrac{1}{2\pi}e^{\frac{-x^2}{2}}}$.

Remarque : $\dfrac{1}{2\pi}$ est une constante. Dans le calcul de la dérivée, on la traite comme on ferait avec 3 ou 10.

$g(x)$ est de la forme $\dfrac{1}{2\pi}e^{u(x)}$ avec $\boxed{u(x)=-\dfrac{x^2}{2}=-\dfrac{1}{2}x^2}$ et $\boxed{u'(x)=-\dfrac{1}{2}\times 2x=-x}$.

Donc $g'(x)=\dfrac{1}{2\pi}\times u'(x)\times e^{u(x)}=\dfrac{1}{2\pi}\times(-x)\times e^{-\frac{x^2}{2}}$ soit $\boxed{g'(x)=-\dfrac{x}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}}$ $\forall\ x\ \in$ ℝ.

Partie C : calculs de dérivées avec études de variations.

Exercice 13 : f est la fonction définie sur ℝ par $\boxed{f(x)=5e^{-2x}}$.

$f(x)$ est de la forme $5e^{u(x)}$ avec $u(x)=-2x$ donc $u'(x)=-2$.

Donc $f'(x)=5u'(x)e^{u(x)}=5\times(-2)\times e^{-2x}$ soit $\boxed{f'(x)=-10e^{-2x}}$.

Comme pour tout X ∈ ℝ, $e^X>0$, pour tout x ∈ ℝ, $e^{-2x}>0$ donc pour tout x ∈ ℝ, $-10e^{-2x}<0$.
Pour tout x ∈ ℝ, on a donc $f'(x)<0$. f est donc strictement décroissante sur ℝ.

On peut aussi le présenter dans un tableau de signes :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
-10	$-$
e^{-2x}	$+$
$f'(x)$	$-$
variations de f	$\searrow$

Exercice 14 : f est la fonction définie sur ℝ par $\boxed{f(x)=100e^{-0,5x+1,5}}$.

$f(x)$ est de la forme $100e^{u(x)}$ avec $u(x)=-0,5x+1,5$ donc $u'(x)=-0,5$.

Donc $f'(x)=100\times u'(x)\times e^{u(x)}=100\times(-0,5)\times e^{-0,5x+1,5}$ soit $\boxed{f'(x)=-50e^{-0,5x+1,5}}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
-50	$-$
$e^{-0,5x+1,5}$	$+$
$f'(x)$	$-$
variations de f	$\searrow$

Exercice 15 : f est la fonction définie sur ℝ par $\boxed{f(x)=(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{2x+1}}$.

Remarque : $\mathrm{e}-1$ est une constante strictement positive puisque $e\approx 2{,}718$.

$f(x)$ est de la forme $(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x)=2x+1$ donc $u'(x)=2$.
Donc $f'(x)=(\mathrm{e}-1)\times u'(x)\times \mathrm{e}^{u(x)}=(\mathrm{e}-1)\times 2\times \mathrm{e}^{2x+1}$ $\boxed{f'(x)=2(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{2x+1}}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
2		$+$	
$\mathrm{e}-1$		$+$	
e^{2x+1}		$+$	
$f'(x)$		$+$	
variations de f		$\nearrow$	

f est strictement croissante sur ℝ.

Exercice 16 : $\boxed{f(x)=0{,}01\,\mathrm{e}^{1{,}2x}+2x}$ sur [0;20].
$f(x)$ est de la forme : $0{,}01\,\mathrm{e}^{u(x)}+2x$ avec $u(x)=1{,}2x$ donc $u'(x)=1{,}2$.
Donc $f'(x)=0{,}01\times u'(x)\times \mathrm{e}^{u(x)}+2=0{,}01\times 1{,}2\,\mathrm{e}^{1{,}2x}+2$ $\boxed{f'(x)=0{,}012\,\mathrm{e}^{1{,}2x}+2}$.

On sait que pour tout réel X, $\mathrm{e}^{X}>0$. Donc pour tout $x\in$ ℝ, $\mathrm{e}^{1{,}2x}>0$, donc $0{,}012\,\mathrm{e}^{1{,}2x}>0$ donc $0{,}012\,\mathrm{e}^{1{,}2x}+2>2$ donc $f'(x)>0$.

x	0		20
$f'(x)$		$+$	
variations de f	$0{,}01$	$\nearrow$	$0{,}01\,\mathrm{e}^{24}+40$

f est strictement croissante sur [0;20] $f(0)=0{,}01\,\mathrm{e}^{1{,}2\times 0}+2\times 0=0{,}01$ et $f(20)=0{,}01\,\mathrm{e}^{24}+40$

Exercice 17 : $\boxed{f(x)=(4-x)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}$ sur [0;4]

$f(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)$ avec $\boxed{u(x)=4-x}$, $\boxed{u'(x)=-1}$, $\boxed{v(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}$ et $\boxed{v'(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}$.

Donc $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=-1\times \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+(4-x)\times\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=\left(-1+\frac{4-x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=\left(-\frac{2}{2}+\frac{4-x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$

$f'(x)=\frac{-2+4-x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$. $\boxed{f'(x)=\frac{2-x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}$

$f(0)=(4-0)\mathrm{e}^{\frac{0}{2}}=4\,\mathrm{e}^{0}=4$ $f(2)=(4-2)\mathrm{e}^{\frac{2}{2}}=2\,\mathrm{e}^{1}=2\,\mathrm{e}$ $f(4)=(4-4)\mathrm{e}^{\frac{4}{2}}=0\,\mathrm{e}^{2}=0$

x	0		2		4
$2-x=-x+2$		$+$	0	$-$	
2		$+$		$+$	
$e^{\frac{x}{2}}$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	4	$\nearrow$	$2e$	$\searrow$	0

Exercice 18 : $\boxed{f(x)=\dfrac{10}{1+e^{-0,2x}}}$ sur $[-2;10]$.

Remarque : il n'y a pas de valeur interdite car pour tout réel x, $e^{-0,2x}>0$ donc $1+e^{-0,2x}>1$ donc $1+e^{-0,2x}\neq 0$

$f(x)$ est de la forme $10\times\dfrac{1}{v(x)}$ avec $\boxed{v(x)=1+e^{-0,2x}}$ et $\boxed{v'(x)=-0,2e^{-0,2x}}$.

Donc $f'(x)=10\times\dfrac{-v'(x)}{(v(x))^2}=\dfrac{-10\times(-0,2e^{-0,2x})}{(1+e^{-0,2x})^2}$ $\boxed{f'(x)=\dfrac{2e^{-0,2x}}{(1+e^{-0,2x})^2}}$

Le numérateur est toujours strictement positif car 2 et $e^{-0,2x}$ le sont.
Le dénominateur est le carré d'un nombre qui est toujours strictement positif, don c'est lui-même un nombre strictement positif.

x	-2		10
$f'(x)$		$+$	
variations de f	$\dfrac{10}{1+e^{0,4}}$	$\nearrow$	$\dfrac{10}{1+e^{-2}}$

$f(-2)=\dfrac{10}{1+e^{-0,2\times(-2)}}=\dfrac{10}{1+e^{0,4}}$ $\quad$ $f(10)=\dfrac{10}{1+e^{-0,2\times 10}}=\dfrac{10}{1+e^{-2}}$ $\left(=\dfrac{10}{1+\dfrac{1}{e^2}}=\dfrac{10}{\dfrac{e^2}{e^2}+\dfrac{1}{e^2}}=\dfrac{10e^2}{e^2+1}\right)$

Exercice 19 : $\boxed{f(x)=\dfrac{25}{5+2e^{-0,5x}}}$ sur [0;15].

Remarque : le dénominateur ne s'annule jamais car il est égal à 5+un produit de nombres strictement positif.

$f(x)$ est de la forme $25\times\dfrac{1}{v(x)}$ avec $\boxed{v(x)=5+2e^{-0,5x}}$ et $\boxed{v'(x)=2\times(-0,5)\times e^{-0,5x}=-e^{-0,5x}}$.

Donc $f'(x)=25\times\dfrac{-v'(x)}{(v(x))^2}=25\times\dfrac{-(-e^{-0,5x})}{(5+e^{-0,5x})^2}$ $\boxed{f'(x)=\dfrac{25e^{-0,5x}}{(5+e^{-0,5x})^2}}$

Le numérateur de $f'(x)$ est toujours strictement positif car 25 et $e^{-0,5x}$ le sont.
Le dénominateur est le carré d'un nombre toujours strictement positif, donc il est lui-même strictement positif.
Donc pour tout x de ℝ et a fortiori de [0;15], $f'(x)>0$.

x	0	15
$f'(x)$	$+$	
variations de f	$\frac{25}{7}$ ↗	$\frac{25}{5+2\mathrm{e}^{-7,5}}$

$$f(0)=\frac{25}{5+2\times\mathrm{e}^{-0,5\times0}}=\frac{25}{5+2\times1}=\frac{25}{7} \qquad f(15)=\frac{25}{5+2\times\mathrm{e}^{-0,5\times15}}=\frac{25}{5+2\mathrm{e}^{-7,5}}$$

Exercice 20 : $\boxed{f(x)=\exp\left(\frac{x^2}{x-1}\right)}$ sur $]-\infty;1[$.

Il y a une valeur interdite : 1, car le dénominateur $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

$f(x)$ est de la forme $\exp(\mathrm{U}(x))$ avec $\boxed{\mathrm{U}(x)=\frac{x^2}{x-1}}$.

$\mathrm{U}(x)$ est de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\boxed{u(x)=x^2}$, $\boxed{u'(x)=2x}$, $\boxed{v(x)=x-1}$ et $\boxed{v'(x)=1}$.

$$\mathrm{U}'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2}=\frac{2x(x-1)-1\times x^2}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \text{ . } \boxed{\mathrm{U}'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}}$$

Donc $f'(x)=\mathrm{U}'(x)\times\exp(\mathrm{U}(x))$ $\qquad \boxed{f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}\times\exp\left(\frac{x^2}{x-1}\right)}$

x	$-\infty$		0		1
x		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$		$-$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0
$\exp\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$		$+$		$+$	$\Vert$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
variations de f		↗	1	↘	$\Vert$

$$f(x)=\exp\left(\frac{0^2}{0-1}\right)=\exp(0)=1$$