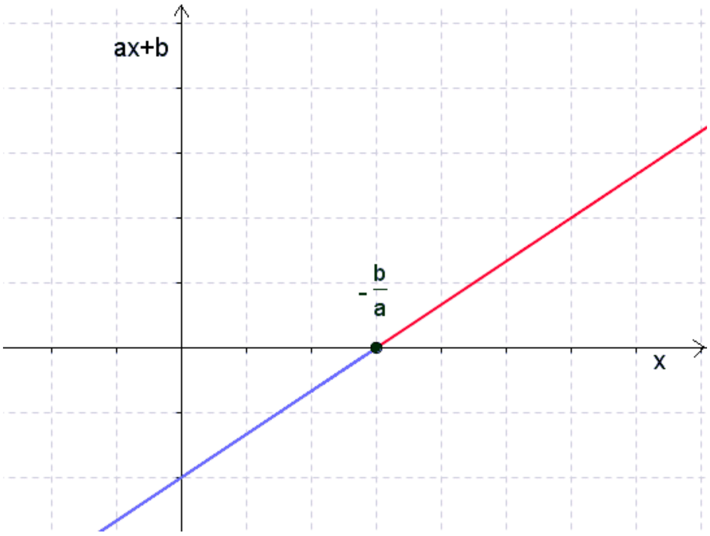
Lycée. Fiche : les tableaux de signes : pour quoi ? Comment ?

Soit x un réel et $A(x)$ une expression dont la valeur dépend de x .

Si $A(x)$ se présente sous la forme d'un **produit** ou d'un **quotient** d'expressions simples en fonction de x, un tableau de signe peut nous permettre de déterminer son signe selon les valeurs de x et grâce à la règle des signes.

Règle des signes :		
⚠ Ne pas appliquer la règle des signes si l'expression n'est pas un produit ou un quotient.	$(+\ldots)\times(+\ldots)=(+\ldots)$ $(+\ldots)\times(-\ldots)=(-\ldots)$ $(-\ldots)\times(+\ldots)=(-\ldots)$ $(-\ldots)\times(-\ldots)=(+\ldots)$	Un produit ou un quotient de plusieurs facteurs est de signe : + si le nombre de facteurs négatifs est pair – si le nombre de facteurs négatifs est impair. Exemple : $\dfrac{(-2)\times(+4)\times(-9)}{(-3)\times(+6)}$ est négatif car ce quotient comporte 3 facteurs négatifs.

Signe d'une expression de la forme $ax+b$ (avec a et b réels constants, $a\neq 0$) :



Si a>0, $ax+b$ est :

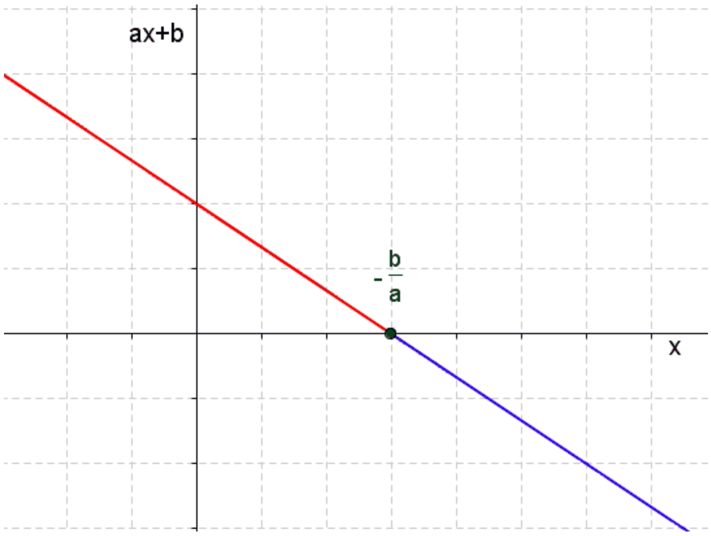
- **négatif** lorsque $\boxed{x<-\dfrac{b}{a}}$

- **nul** si $\boxed{x=-\dfrac{b}{a}}$

- **positif** lorsque $\boxed{x>-\dfrac{b}{a}}$

Ce qui se résume ainsi dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	



Si a<0, $ax+b$ est :

- **positif** lorsque $\boxed{x<-\dfrac{b}{a}}$

- **nul** si $\boxed{x=-\dfrac{b}{a}}$

- **négatif** lorsque $\boxed{x>-\dfrac{b}{a}}$

Ce qui se résume ainsi dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

On peut retenir : « $ax+b$ est du signe de a « à droite » de la valeur où il s'annule. »

<u>Exemples</u> : établissons le tableau de signes de $\frac{1}{3}x-4$ et celui de $-2x-5$, tous deux de la forme $ax+b$

<table>
<tr>
<td>

Signe de $\frac{1}{3}x-4$? ($a=\frac{1}{3}$, $b=-4$)

On résout $\frac{1}{3}x-4=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x=4 \Leftrightarrow \boxed{x=12}$

$-\frac{b}{a}$

x	$-\infty$		12		$+\infty$
$\frac{1}{3}x-4$		$-$	0	$+$	

car $\frac{1}{3}>0$

</td>
<td>

Signe de $-2x-5$? ($a=-2$, $b=-5$)

On résout $-2x-5=0 \Leftrightarrow -2x=5 \Leftrightarrow \boxed{x=-\frac{5}{2}}$

$-\frac{b}{a}$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-2x-5$		$+$	0	$-$	

car $-2<0$

</td>
</tr>
</table>

Dans la pratique, on n'a pas besoin d'un tableau de signes pour connaître le signe d'une expression du type $ax+b$. Mais un tableau de signes est indispensable dès qu'on veut connaître le signe d'un produit ou d'un quotient d'expressions de ce type ou d'autres types d'expressions dont on connaît aussi le signes (par exemple : des constantes, ou des trinômes du second degré (en première), ou des fonctions de référence).

<u>Commençons par un exemple simple</u> :

On voudrait connaître le signe de $(2x+6)(-x+1)$, par exemple pour résoudre l'inéquation $(2x+6)(-x+1)\underbrace{<0}_{\text{(strictement négatif)}}$.

- On cherche les valeurs de x qui annulent $2x+6$ et $-x+1$:

$2x+6=0 \Leftrightarrow 2x=-6 \Leftrightarrow \boxed{x=-3}$ $\qquad$ $-x+1=0 \Leftrightarrow -x=-1 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$

- On construit un tableau de signes :

– Dans la première ligne, qui matérialise les valeurs prises par x entre $-\infty$ et $+\infty$, on place dans l'ordre croissant les valeurs qui annulent $2x+6$ et $-x+1$.

– Dans la première colonne, sous x, on indique chacun des facteurs, puis l'expression dont on veut connaître le signe.

Comme $2x+6$ vaut 0 lorsque $x=-3$, on place 0 dans la ligne de $2x+6$ sous la valeur -3 pour x.
Comme $-x+1$ vaut 0 lorsque x vaut 1, on place 0 dans la ligne de $-x+1$ sous la valeur 1 pour x.

On partage alors le tableau en trois intervalles :]–∞;-3[,]-3;1[et]1;+∞[pour placer les signes + et –.

Dans la ligne de $(2x+6)(-x+1)$, on place d'abord les 0 (car un produit est nul lorsque l'un au moins de ses facteurs est nul), puis les + et les – en appliquant la règle des signes avec le signe des facteurs.

x	$-\infty$		$\boxed{-3}$		$\boxed{1}$		$+\infty$
$\boxed{2x+6}$		$-$	0	$+$		$+$	
$\boxed{-x+1}$		$+$		$+$	0	$-$	
$\boxed{(2x+6)(-x+1)}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On sait maintenant que $(2x+6)(-x+1)$ est strictement positif lorsque $-3<x<1$, nul lorsque $x=-3$ ou $x=1$ et strictement négatif lorsque $x<-3$ ou $x>1$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $(2x+6)(-x+1)<0$ est donc]–∞;-3[∪]1;+∞[

Étudions un exemple simple où l'expression dont on veut connaître le signe est un quotient.

Par exemple : $Q(x)=\dfrac{-4x}{x+5}$ ← numérateur / ← dénominateur

⚠ Pour toute expression où x figure au dénominateur, on commence par déterminer les valeurs interdites (c'est-à-dire les valeurs de x qui annulent le dénominateur : car la division par 0 n'a pas de sens).

- Recherche des valeurs interdites : $x+5=0 \Leftrightarrow \boxed{x=-5}$.
- Recherche des valeurs qui annulent le numérateur : $-4x=0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$ (En divisant les deux membres par -4)
- Construction du tableau de signes :

x	$-\infty$		$\boxed{-5}$		$\boxed{0}$		$+\infty$
$-4x$		+		+	0	−	
$x+5$		−	0	+		+	
$Q(x)$		−	‖	+	0	−	

Lorsque qu'un zéro « passe » au dénominateur, on a une valeur interdite. Le quotient n'existe pas, on note : ‖

Lorsque le numérateur d'un quotient est nul, mais pas son dénominateur, le quotient vaut 0.

Bilan : $Q(x)$ est :

- Strictement positif lorsque $-5<x<0$, soit sur $]-5;0[$
- Nul lorsque $x=0$
- Strictement négatif lorsque $x<-5$ ou $x>0$, soit sur $]-\infty;-5[\cup]0;+\infty[$

Si on veut résoudre par exemple $Q(x)\leqslant 0$, l'ensemble des solutions est :S= $]-\infty;-5[\cup[0;+\infty[$.

(attention à bien inclure la valeur où Q(x)=0, puisque l'inégalité est large)

Pour $Q(x)<0$, l'ensemble des solutions est S=$]-\infty;-5[\cup]0;+\infty[$ (réunion d'intervalles)
Pour $Q(x)>0$, l'ensemble des solutions est $S=]-5;0[$. (intervalle ouvert)
Pour $Q(x)\geqslant 0$, l'ensemble des solutions est $S=]-5;0]$. (intervalle semi-ouvert)
Pour $Q(x)=0$, l'ensemble des solutions est $S=\{0\}$ (valeur isolée, notée entre accolades)

Les tableaux de signes ne servent pas qu'à résoudre des inéquations. On peut être amené à étudier le signe d'une expression pour d'autres finalités. À partir de la première, l'étude du signe de la dérivée d'une fonction permet de connaître les variations de cette fonction.

Attaquons-nous maintenant à un exemple plus conséquent :

On veut déterminer le signe de $\boxed{A(x)=\dfrac{-5(7-x)(3x+9)}{x^2-4}}$

- Recherche des valeurs interdites (là où on aura des ‖ au bas du tableau) :

$x^2-4=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2)=0 \Leftrightarrow x+2=0$ ou $x-2=0 \Leftrightarrow \boxed{x=2}$ ou $\boxed{x=-2}$.

Remarque : il va être judicieux d'écrire $A(x)=\dfrac{-5(7-x)(3x+9)}{(x+2)(x-2)}$

- Recherche des valeurs de x qui annulent le numérateur (et qui seront les 0 du quotient):

$-5(7-x)(3x+9)=0$ lorsque $-5=0$ ou $7-x=0$ ou $3x+9=0$

✔ $-5=0$ est toujours faux quel que soit x , cette équation n'a pas de solution.
✔ $7-x=0 \Leftrightarrow 7=x \Leftrightarrow \boxed{x=7}$
✔ $3x+9=0 \Leftrightarrow 3x=-9 \Leftrightarrow \boxed{x=-3}$

- Petite discussion avant de construire le tableau de signes :

Le facteur -5 , une constante, est strictement négatif quelle que soit la valeur de x . C'est pourquoi on inscrit des – dans sa ligne.

Le facteur $7-x$ est égal à $-x+7$. C'est une expression du type $ax+b$ avec $a<0$, $a=-1$.

- Construction du tableau de signes :

valeurs prises par x	x	$-\infty$		-3		-2		2		7		$+\infty$
facteurs du numérateur	-5		–		–		–		–		–	
	$7-x$		+		+		+		+	0	–	
	$3x+9$		–	0	+		+		+		+	
facteurs du dénominateur	$x+2$		–		–	0	+		+		+	
	$x-2$		–		–		–	0	+		+	
quotient	A(x)		+	0	–	‖	+	‖	–	0	+	

- Bilan : $A(x)$ est :

✔ Strictement positif pour x ∈]–∞;-3[∪]-2;2[∪]7;+∞[
✔ Nul pour $x=-3$ ou $x=7$
✔ Strictement négatif pour x ∈]-3;-2[∪]2;7[
✔ N'existe pas si $x=-2$ ou $x=2$

Note : dans une copie, inutile d'écrire le bilan en toutes lettres : faire le tableau suffit.

L'ensemble des solutions de :	est :
$A(x)>0$	]–∞;-3[∪]-2;2[∪]7;+∞[
$A(x)\geqslant 0$	]–∞;-3] ∪]-2;2[∪ [7;+∞[
$A(x)<0$	]-3;-2[∪]2;7[
$A(x)\leqslant 0$	[-3;-2[∪]2;7]
$A(x)=0$	{-3;7}