Exercice 1 :

$\frac{3}{5} = \frac{15}{\boxed{25}}$ car $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 5}{5 \times 5} = \frac{15}{25}$

$\frac{24}{16} = \frac{3}{\boxed{2}}$ car $\frac{24}{16} = \frac{3 \times \cancel{8}}{2 \times \cancel{8}} = \frac{3}{2}$

$\frac{55}{77} = \frac{\boxed{5}}{7}$ car $\frac{55}{77} = \frac{5 \times \cancel{11}}{7 \times \cancel{11}} = \frac{5}{7}$

$\frac{3,5}{2} = \frac{\boxed{7}}{4}$ car $\frac{3,5}{2} = \frac{3,5 \times 2}{2 \times 2} = \frac{7}{4}$

$\frac{4,1}{0,6} = \frac{\boxed{41}}{6}$ car $\frac{4,1}{0,6} = \frac{4,1 \times 10}{0,6 \times 10} = \frac{41}{6}$

$\frac{0,8}{0,13} = \frac{\boxed{80}}{13}$ car $\frac{0,8}{0,13} = \frac{0,8 \times 100}{0,13 \times 100} = \frac{80}{13}$

Exercice 2 :

a) $\frac{28}{49} = \frac{4 \times \cancel{7}}{7 \times \cancel{7}} = \frac{4}{7}$ → OUI : $\frac{28}{49} = \frac{4}{7}$

b) $\frac{36}{64} = \frac{4 \times 9}{8 \times 8} = \frac{\cancel{4} \times 9}{2 \times \cancel{4} \times 8} = \frac{9}{16}$

9 → n'est pas multiple de 4
16 → n'est pas multiple de 7

Remarque : $\frac{4}{7}$ est une fraction irréductible.

$\frac{9}{16}$ aussi. Si elles étaient égales, leurs formes irréductibles seraient identiques.

→ NON . $\frac{36}{64}$ n'est pas égale à $\frac{4}{7}$

c) $\frac{70}{40} = \frac{7 \times \cancel{10}}{4 \times \cancel{10}} = \frac{7}{4} \neq \frac{4}{7}$ → NON . $\frac{70}{40}$ n'est pas égale à $\frac{4}{7}$

d) $\frac{1}{1,75} = \frac{1 \times 100}{1,75 \times 100} = \frac{100}{175} = \frac{4 \times \cancel{25}}{7 \times \cancel{25}} = \frac{4}{7}$.

→ OUI . $\frac{1}{1,75} = \frac{4}{7}$

e) $\frac{2}{3,5} = \frac{2 \times 2}{3,5 \times 2} = \frac{4}{7}$ → OUI . $\frac{2}{3,5} = \frac{4}{7}$

f) $\frac{5}{8}$ est une fraction irréductible différente de $\frac{4}{7}$.

→ NON . $\frac{5}{8}$ n'est pas égal à $\frac{4}{7}$.

g) $\frac{44}{77} = \frac{4 \times \cancel{11}}{7 \times \cancel{11}} = \frac{4}{7}$ → OUI $\frac{44}{77} = \frac{4}{7}$

h) $\frac{0,40}{0,07} = \frac{0,40 \times 100}{0,07 \times 100} = \frac{40}{7} \neq \frac{4}{7}$ → NON $\frac{0,40}{0,07}$ n'est pas égal à $\frac{4}{7}$

i) $\frac{41,24}{41,3} = \frac{41,24 \times 100}{41,3 \times 100} = \frac{4124}{4130} = \frac{2062 \times \cancel{2}}{2065 \times \cancel{2}} = \frac{2062}{2065}$

↓

fraction irréductible (d'après la calculatrice)

Donc : NON → $\frac{41,24}{41,3}$ n'est pas égal à $\frac{4}{7}$.

Pour le vérifier sans calculatrice :

41,24	4
41,3	7

$41,24 \times 7 = 288,68$
$41,3 = 165,2$

Les deux résultats sont différents.

Si les 2 fractions étaient égales, on aurait trouvé le même résultat, car le tableau aurait été un tableau de proportionnalité.

Suite de l'exercice 2 : i) NON → $\frac{7}{4}$ n'est pas égal à $\frac{4}{7}$.

D'ailleurs : $\frac{7}{4} > 1$ et $\frac{4}{7} < 1$. Ces deux fractions ne peuvent donc pas être égales.

j) $\frac{1,2}{2,1} = \frac{1,2 \times 10}{2,1 \times 10} = \frac{12}{21} = \frac{\cancel{3} \times 4}{\cancel{3} \times 7} = \frac{4}{7}$

→ OUI. $\frac{1,2}{2,1}$ est bien égal à $\frac{4}{7}$.

Bilan : les quotients de l'exercice qui sont égaux à $\frac{4}{7}$ sont :

$\boxed{a)\ \frac{28}{49} \quad d)\ \frac{1}{1,75} \quad e)\ \frac{2}{3,5} \quad g)\ \frac{44}{77} \quad \text{et} \quad j)\ \frac{1,2}{2,1}}$

Exercice 3 :

Rappel : Une fraction $\frac{a}{b}$ où $a \geq 0$ et $b > 0$ est supérieure à 1 lorsque $a > b$ et inférieure à 1 lorsque $a < b$

a) $\frac{2}{3}$ est inférieur à 1 car $2 < 3$ NON

b) $\frac{3}{2}$ est supérieur à 1 car $3 > 2$ OUI

c) $\frac{5}{7}$ est inférieur à 1 car $5 < 7$ NON

d) $\frac{9}{7}$ est supérieur à 1 car $9 > 7$ OUI

e) $\frac{7}{15}$ est inférieur à 1 car $7 < 15$ NON

f) $\frac{3,11}{3,9}$ est inférieur à 1 car $3,11 < 3,9$ NON

g) $\frac{8,3}{8,30}$ est égal à 1. Si "supérieur à 1" est compris au sens strict "strictement supérieur à 1", la réponse est NON

Mais si "supérieur à 1" est compris au sens large : "supérieur ou égal à 1", la réponse est OUI.

h) $\frac{1}{0,98}$ est supérieur à 1 car $1 > 0,98$ OUI

i) $\frac{41,24}{41,3}$ est inférieur à 1 car $41,24 < 41,3$ NON

j) $\frac{6,71}{6,5}$ est supérieur à 1 car $6,71 > 6,5$ OUI

k) $\frac{0,715}{0,0843}$ est supérieur à 1 car $0,715 > 0,0843$ OUI

l) $\frac{394,52}{384,53}$ est supérieur à 1 car $394,52 > 384,53$ OUI

Bilan : Les quotients de l'exercice qui sont supérieurs à 1 sont :

$\boxed{b)\ \frac{3}{2} \quad d)\ \frac{9}{7} \quad h)\ \frac{1}{0,98} \quad j)\ \frac{6,71}{6,5} \quad k)\ \frac{0,715}{0,0843} \quad \text{et} \quad l)\ \frac{394,52}{384,53}}$

et éventuellement g) $\frac{8,3}{8,30}$, si "supérieur" est compris au sens large.

Exercice 4.

a) $\frac{8}{7} > \frac{15}{16}$ car $8 > 7$ et donc $\frac{8}{7} > 1$ et car $15 < 16$ et donc $\frac{15}{16} < 1$

b) $\frac{13}{9} < \frac{15}{9}$ car les 2 fractions ont le même dénominateur : 9. C'est donc celle dont le numérateur est le plus grand qui est la plus grande.

Suite de l'exercice 4.

c) $\frac{4}{11} > \frac{4}{13}$ car ces 2 fractions ont le même numérateur : 4. La plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur : des 11èmes sont de "plus grosses parts" que des 13èmes.

d) $\frac{1,3}{1,2} > \frac{1,7}{1,8}$ car $\frac{1,3}{1,2} > 1$ puisque $1,3 > 1,2$

tandis que $\frac{1,7}{1,8} < 1$ puisque $1,7 < 1,8$

Exercice 5 :

1) $\frac{2+7}{2+4}$ est égal à $\frac{9}{6}$ puisque $2+7=9$ et $2+4=6$

$\frac{9}{6} = \frac{\cancel{3}\times 3}{\cancel{3}\times 2} = \frac{3}{2} = 1,5$ ← écriture décimale.

↑ fraction simplifiée

Les réponses $\frac{7}{4}$ et 7,4 ne conviennent pas

car $\frac{7}{4} = 1,75$ → aucun des 2 n'est égal à 1,5

$\boxed{\frac{2+7}{2+4} \text{ est égal à : } \square\ \frac{7}{4} \quad \square\ 7,4 \quad \boxtimes\ 1,5 \quad \boxtimes\ 3,2}$

2) $\frac{36}{24} = \frac{\cancel{6}\times 6}{\cancel{6}\times 4} = \frac{6}{4} = \frac{3\times\cancel{2}}{2\times\cancel{2}} = \frac{3}{2} = 1,5$

fraction simplifiée ↗ ↖ écriture décimale

Testons les réponses proposées :

* $\frac{12}{8} = \frac{3\times\cancel{4}}{2\times\cancel{4}} = \frac{3}{2}$ → c'est bien égal OK

* $\frac{18}{12} = \frac{\cancel{6}\times 3}{\cancel{6}\times 2} = \frac{3}{2}$ → c'est bien égal : OK.

* $\frac{3}{2}$ OK

* 1,33 pas OK puisque $1,33 \neq 1,5$

$\boxed{\frac{36}{24} \text{ est égal à : } \boxtimes\ \frac{12}{8} \quad \boxtimes\ \frac{18}{12} \quad \boxtimes\ \frac{3}{2} \quad \square\ 1,33}$

3) $\frac{2}{1,5} \overset{\times 10}{=} \frac{20}{15} = \frac{\cancel{5}\times 4}{\cancel{5}\times 3}$...

Testons les réponses proposées :

* $\frac{2}{15}$ → NON car $\frac{2}{15} \neq \frac{20}{15}$ ← numérateurs différents, ← même dénominateur.

* $\frac{4}{3}$ → NON car $\frac{4}{3} \neq \frac{5}{3}$

* $\frac{20}{15}$ → OUI

* $\frac{20}{150}$ → NON car $\frac{20}{15} \neq \frac{20}{150}$ ← même numérateur, ← dénominateurs différents

$\boxed{\frac{2}{1,5} \text{ est égal à } \square\ \frac{2}{15} \quad \square\ \frac{4}{3} \quad \boxtimes\ \frac{20}{15} \quad \square\ \frac{20}{150}}$

4) $3,6 \div 0,09 = \frac{3,6}{0,09} = \frac{3,6\times 100}{0,09\times 100} = \frac{360}{9} = \frac{\cancel{9}\times 40}{\cancel{9}\times 1} = \frac{40}{1} = 40$

Testons les réponses proposées :

* $\frac{360}{9}$ → OUI

Suite de l'exercice 5 question 4.

* 4 → NON car $4 \neq 40$

* 40 → OUI

* $\frac{36}{9}$ → NON car $\frac{36}{9} \neq \frac{360}{9}$ ← numérateurs différents ← même dénominateur

$3{,}6 \div 0{,}09$ est égal à ☒ $\frac{360}{9}$ ☐ 4 ☒ 40 ☐ $\frac{36}{9}$

5) $\frac{7}{9} < 1$ car $7 < 9$ et $\frac{13}{11} > 1$ car $13 > 11$.

Les 2 premières réponses sont donc fausses.
La troisième est juste.
La quatrième est fausse car $\frac{7}{9}$ n'est pas supérieur à 1.

Concernant les fractions $\frac{7}{9}$ et $\frac{13}{11}$

☐ Elles sont toutes deux inférieures à 1
☐ Elles sont toutes deux supérieures à 1
☒ $\frac{7}{9} < 1$ et $\frac{13}{11} > 1$ ☐ $1 < \frac{13}{11}$ et $\frac{7}{9} > 1$

Exercice 6 : Pour ranger ces fractions par ordre croissant, nous allons toutes les réduire au même dénominateur : il est possible ici de toutes les réduire sur 11, car :

$\frac{16}{22} = \frac{8 \times \cancel{2}}{11 \times \cancel{2}} = \frac{8}{11}$ et $\frac{15}{33} = \frac{\cancel{3} \times 5}{\cancel{3} \times 11} = \frac{5}{11}$

On a : $\frac{2}{11} < \frac{5}{11} < \frac{8}{11} < \frac{11}{11} < \frac{15}{11} < \frac{24}{11}$

Soit : $\boxed{\frac{2}{11} < \frac{15}{33} < \frac{16}{22} < \frac{11}{11} < \frac{15}{11} < \frac{24}{11}}$

Exercice 7 : Facile ! Les fractions $\frac{a}{b}$ sont - inférieures à 1 quand a<b
- égales à 1 quand a=b
- supérieures à 1 quand a>b

Fractions inférieures à 1	Fractions égales à 1	Fractions supérieures à 1
$\frac{1}{6}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{8}{11}$	$\frac{5}{5}$ $\frac{6}{6}$	$\frac{5}{3}$ $\frac{9}{7}$ $\frac{13}{2}$
$\frac{4}{5}$ $\frac{6}{14}$		$\frac{7}{4}$ $\frac{11}{8}$

Exercice 8 : Pour classer ces fractions par ordre croissant, réduisons-les au même dénominateur : 12 semble approprié car c'est le plus petit multiple commun à 4, 2 et 3.

$\frac{9}{4} = \frac{9 \times 3}{4 \times 3} = \frac{27}{12}$ $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 6}{2 \times 6} = \frac{6}{12}$

$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$ $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$

$\frac{5}{4} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{15}{12}$ $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$

$\frac{3}{12} < \frac{4}{12} < \frac{6}{12} < \frac{8}{12} < \frac{15}{12} < \frac{27}{12}$

soit $\boxed{\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{5}{4} < \frac{9}{4}}$

Exercice 9 : D'après le schéma, l'abscisse de A doit être inférieure à celle de B, elle-même inférieure à celle de C, elle-même inférieure à celle de D. Pour retrouver à quel point correspond quelle abscisse, il nous suffit de classer les nombres 2 ; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{6}$ et $\frac{3}{2}$ par ordre croissant.

Pour cela, réduisons-les au même dénominateur.
6 est le meilleur choix car il est le plus petit multiple commun à 1, 3, 6 et 2.

$2 = \frac{2}{1} = \frac{2 \times 6}{1 \times 6} = \frac{12}{6}$ → abscisse de D

$\frac{4}{3} = \frac{4 \times 2}{3 \times 2} = \frac{8}{6}$ → abscisse de B

$\frac{5}{6} = \frac{5}{6}$ → abscisse de A

$\frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{9}{6}$ → abscisse de C

d'où $\boxed{A\left(\frac{5}{6}\right) ; B\left(\frac{8}{6}\right) ; C\left(\frac{9}{6}\right) \text{ et } D\left(\frac{12}{6}\right)}$

L'usage est de noter l'abscisse du point entre parenthèses après le nom du point. Si le point a plus d'une coordonnée, on les sépare par des ;

exemple : E (7 ; 19) dans le plan rapporté à un repère
F (0 ; −4 ; 10) dans l'espace rapporté à un repère.

Exercice 10 : 1) * Idée n°1 : diviser 11 par 3 et comparer le résultat à 3,5 :

11	3
20	3,66…
2	
…	

Comme une valeur arrondie au 10ème de $\frac{11}{3}$ est 3,67, $\frac{11}{3}$ est plus grand que 3,5.

→ Un segment de $\frac{11}{3}$ cm est plus long qu'un segment de 3,5 cm.

* Idée n°2 : Transformer 3,5 en fraction, puis réduire la fraction trouvée et $\frac{11}{3}$ au même dénominateur :

$3,5 = \frac{3,5}{1} = \frac{3,5 \times 2}{1 \times 2} = \frac{7}{2} = \frac{7 \times 3}{2 \times 3} = \frac{21}{6}$

$\frac{11}{3} = \frac{11 \times 2}{3 \times 2} = \frac{22}{6}$

$\frac{22}{6} > \frac{21}{6}$ donc $\frac{11}{3} > 3,5$

→ Un segment de $\frac{11}{3}$ cm est donc plus long qu'un segment de 3,5 cm

2) $\frac{24}{6} = 4$ puisque $6 \times 4 = 24$.

Un segment de $\frac{24}{6}$ m et un segment de 4 m sont donc exactement de la même longueur.

Exercice 11 : a) Pour $\frac{29}{3}$, je cherche les deux multiples de 3 qui encadrent 29 :

$9 \times 3 = 27$ et $10 \times 3 = 28$

$$\frac{27}{3} < \frac{29}{3} < \frac{30}{3}$$

soit $\boxed{9 < \frac{29}{3} < 10}$

→ On peut le vérifier en divisant 29 par 3, à la main ou à la calculatrice.

b) Je cherche les multiples de 5 qui encadrent 16 :

$15 < 16 < 20$ donc $\boxed{3 < \frac{16}{5} < 4}$

puisque $3 = \frac{15}{5}$ et $4 = \frac{20}{5}$

c) Je cherche les multiples de 19 qui encadrent 15 :

$19 \times 0 = 0$ et $19 \times 1 = 19$

$\boxed{0 < \frac{15}{19} < 1}$ car $0 = \frac{0}{19}$ et $1 = \frac{19}{19}$

On pouvait remarquer que $\frac{15}{19}$ est nécessairement un nombre compris entre 0 et 1 puisque $15 < 19$ (et que 15 et 19 sont 2 entiers strictement positifs)

d) Encadrons 25 par 2 multiples de 4 : $24 < 25 < 28$.

$\boxed{6 < \frac{25}{4} < 7}$ car $6 = \frac{24}{4}$ et $7 = \frac{28}{4}$

e) Encadrons 62 par 2 multiples de 9 : $54 < 62 < 63$

$\boxed{6 < \frac{62}{9} < 7}$ car $6 = \frac{54}{9}$ et $7 = \frac{63}{9}$

Exercice 12 : * Idée n°1 : effectuer les divisions.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ \hline 30 & 1,75 \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

$\frac{7}{4} = 1,75$

$$\begin{array}{r|l} 14 & 16 \\ \hline 140 & 0,875 \\ -128 & \\ 120 & \\ -112 & \\ 80 & \\ -80 & \\ 0 & \end{array}$$

$\frac{14}{16} = 0,874$

donc $\boxed{\begin{array}{c} 1,75 \neq 0,874 \\ \frac{7}{4} \neq \frac{14}{16} \end{array}}$

* Idée n°2 : Remarquer que l'une est plus petite que 1 et l'autre plus grande que 1.

$\boxed{\begin{array}{l} \frac{14}{16} < 1 \text{ car } 14 < 16 \text{ et } \frac{7}{4} > 1 \text{ car } 7 > 4 \\ \frac{14}{16} \text{ et } \frac{7}{4} \text{ ne peuvent donc pas être égales.} \end{array}}$

Suite de l'exercice 12. * **Idée n°3** : Réduire les 2 fractions au même dénominateur.

→ On peut les réduire sur 16 car 16 est un multiple de 4.

$$\boxed{\frac{7}{4} = \frac{7\times4}{4\times4} = \frac{28}{16} \qquad \frac{28}{16} \neq \frac{14}{16} \text{ donc } \frac{7}{4} \neq \frac{14}{16}}$$

→ On peut commencer par simplifier la fraction $\frac{14}{16}$:

$$\frac{14}{16} = \frac{\cancel{2}\times7}{\cancel{2}\times8} = \frac{7}{8}$$

› Puis réduire $\frac{7}{4}$ sur 8 : $\frac{7}{4} = \frac{7\times2}{4\times2} = \frac{14}{8}$

$$\boxed{\frac{14}{8} \neq \frac{7}{8} \text{ donc } \frac{7}{4} \neq \frac{14}{16}}$$

› Ou simplement remarquer que $\frac{7}{8}$ et $\frac{7}{4}$ ont le même numérateur, mais des dénominateurs différents.

Ce qui nous prouve que $\boxed{\frac{7}{8} \neq \frac{7}{4} \text{ soit } \frac{14}{16} \neq \frac{7}{4}}$

Exercice 13. a) $\boxed{\frac{5}{7} < \frac{6}{7}}$ car les 2 fractions ont le même dénominateur.

La plus grande est donc celle qui a le plus grand numérateur.

b) $\boxed{\frac{8}{7} > \frac{9}{10}}$ car $\frac{8}{7} > 1$ puisque $8 > 7$

et $\frac{9}{10} < 1$ puisque $9 < 10$

c) $\frac{4}{7} = \frac{4\times8}{7\times8} = \frac{32}{56}$ $\qquad \frac{5}{8} = \frac{5\times7}{8\times7} = \frac{35}{56}$

$\frac{32}{56} < \frac{35}{56}$ donc $\boxed{\frac{4}{7} < \frac{5}{8}}$

Exercice 14 : a) $23{,}4 : 0{,}12 \underset{\times100}{\overset{\times100}{=}} 2340 : 12 = \boxed{195}$

```
 2 3 4 0 | 1 2
   1 1 4 |------
 - 1 0 8 | 1 9 5
     6 0 |
       0 |
```

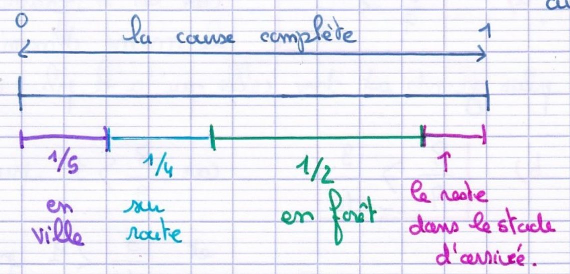
b) $7{,}03 : 0{,}9 \underset{\times100}{\overset{\times100}{=}} 703 : 90$

```
   7 0 3   | 9 0
 - 6 3 0   |--------
     7 3 0 | 7 , 8 1 ...
   - 7 2 0 |
       1 0 0
     -   9 0
         1 0
```

Ici, le quotient n'est pas un nombre décimal. Il est égal à 7,8111...

avec une infinité de 1.

Exercice 15 :



Suite de l'exercice 15 : * Idée n°1 : Comme $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$ sont des nombres décimaux, on peut calculer avec des nombres décimaux : $\frac{1}{5} = 0,2$ $\frac{1}{4} = 0,25$ $\frac{1}{2} = 0,5$

$$1 - 0,2 - 0,25 - 0,5 = 0,05 = \frac{5}{100} = \frac{1 \times 5}{20 \times 5} = \frac{1}{20}$$

$\frac{5}{100} \downarrow 5\%$

→ La proportion de cette course qui se déroule dans le stade d'arrivée est $\frac{1}{20}$ ou encore 5%.

Mais si l'une des fractions n'avait pas été un nombre décimal, comme $\frac{1}{3}$ par exemple, on n'aurait pas eu le droit de calculer ainsi !

* Idée n°2 : Calculer avec les fractions, en les réduisant au même dénominateur.

Le plus petit multiple commun aux 3 dénominateurs, 5, 4 et 2 est 20.

$\frac{1}{5} = \frac{1 \times 4}{5 \times 4} = \frac{4}{20}$ → proportion du parcours effectuée en ville

$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 5}{4 \times 5} = \frac{5}{20}$ → proportion du parcours effectuée sur route

$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 10}{2 \times 10} = \frac{10}{20}$ → proportion du parcours effectuée en forêt

$1 = \frac{1}{1} = \frac{1 \times 20}{1 \times 20} = \frac{20}{20}$ → parcours total

$$1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{20}{20} - \frac{4}{20} - \frac{5}{20} - \frac{10}{20}$$
$$= \frac{20 - 4 - 5 - 10}{20}$$
$$= \frac{1}{20}$$

La proportion de la course qui se déroule dans le stade d'arrivée est $\frac{1}{20}$.

Exercice 16 :

Avant : On avait $12 + 15 = 27$ élèves dont 12 garçons

Après : On a $13 + 15 = 28$ élèves dont 13 garçons

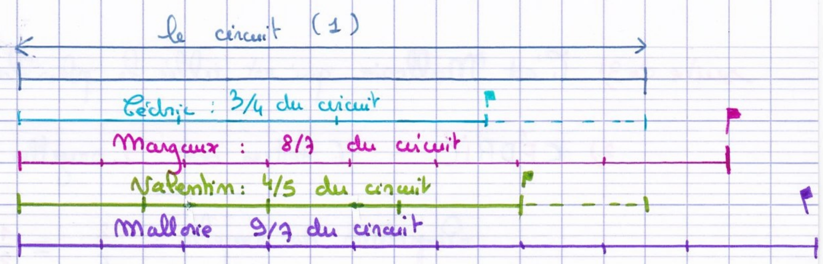
Logiquement, si un garçon arrive dans cette classe, la proportion de garçons devrait avoir augmenté. Vérifions-le par le calcul :

	Proportion de garçons avant :	Proportion de garçons après :
1) J'essaie de simplifier	$\frac{12}{27} = \frac{4 \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times 9} = \frac{4}{9}$ ($27 = 3 \times 9$)	$\frac{13}{28}$ → pas simplifiable ($28 = 4 \times 7$)
2) Je réduis au même dénominateur :	$\frac{4}{9} = \frac{4 \times 28}{9 \times 28} = \frac{112}{252}$	$\frac{13}{28} = \frac{13 \times 9}{28 \times 9} = \frac{117}{252}$

28 et 9 n'ayant aucun diviseur commun, leur plus petit multiple commun est 9×28. C'est pourquoi je réduis les 2 fractions sur $9 \times 28 = 252$ pour les comparer.

$\frac{112}{252} < \frac{117}{252}$ → $\boxed{\text{La proportion de garçons a bien augmenté dans cette classe.}}$

Exercice 17 :



Par chance, comme 14 carreaux = 12 cm, j'ai pu faire une représentation graphique précise du problème, qui me permet de lire le résultat. Mais vérifions cela par le calcul, car, en mathématiques, une lecture graphique n'est pas une preuve.

1) Les élèves ayant terminé le circuit sont Margaux et Mallorie, car $\frac{8}{7} > 1$ et $\frac{9}{7} > 1$ tandis que

$\frac{3}{4} < 1$ et $\frac{4}{5} < 1$

puisque $8 > 7$, $9 > 7$, $3 < 4$ et $4 < 5$. Suite page suivante →

2) C'est Cédric qui est allé le moins loin.
En effet : $\frac{3}{4} = 0,75$ alors que $\frac{4}{5} = 0,8$

donc $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$

Au lieu de calculer les valeurs décimales, on pouvait réduire les 2 fractions sur 20 :

$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$ $\qquad \frac{4}{5} = \frac{4 \times 4}{5 \times 4} = \frac{16}{20}$

$\frac{15}{20} < \frac{16}{20}$ donc $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$

suite du 1) C'est Mallorie qui est allée le plus loin, car $\frac{9}{7} > \frac{8}{7}$.

3) CÉDRIC : 6 lettres dont 2 voyelles et 4 consonnes.

Proportion de voyelles : $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Proportion de consonnes : $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

MARGAUX : 7 lettres dont 3 voyelles et 4 consonnes.

Proportion de voyelles : $\frac{3}{7}$

Proportion de consonnes : $\frac{4}{7}$

VALENTIN : 8 lettres dont 3 voyelles et 5 consonnes.

Proportion de voyelles : $\frac{3}{8}$

Proportion de consonnes : $\frac{5}{8}$

MALLORIE : 8 lettres dont 4 voyelles et 4 consonnes.

Proportion de voyelles : $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Proportion de consonnes : $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Qui a la plus grande proportion de voyelles ?

→ Mallorie car $\frac{1}{3}$ ou $\frac{3}{7}$ ou $\frac{3}{8}$, c'est moins de la moitié : $\frac{1}{2} = \frac{1,5}{3} = \frac{3,5}{7} = \frac{4}{8}$

$\frac{1,5}{3} > \frac{1}{3}$; $\frac{3,5}{7} > \frac{3}{7}$; $\frac{4}{8} > \frac{3}{8}$

Qui a la plus grande proportion de consonnes ?

→ Pas Mallorie en tout cas, puisqu'elle a la plus grande proportion de voyelles.

Suite de l'exercice 17 - Question 3 . Comparons :

$\frac{2}{3}$ pour Cédric $\frac{4}{7}$ pour Margaux $\frac{5}{8}$ pour Valentin

$\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{7}$ ne sont pas des nombres décimaux. On ne va donc pas pouvoir comparer les 3 nombres à l'aide de leurs valeurs décimales. Rappel : travailler avec des valeurs approchées ne constitue pas une preuve en mathématiques. Mais celles-ci peuvent nous servir pour vérifier nos calculs.

Réduisons $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$ et $\frac{5}{8}$ au même dénominateur.

Le plus petit multiple commun de 3, 7 et 8 est $3 \times 7 \times 8 = 168$ car 3, 7 et 8 n'ont aucun diviseur commun.

$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 7 \times 8}{3 \times 7 \times 8} = \frac{112}{168}$

$\frac{4}{7} = \frac{4 \times 3 \times 8}{7 \times 3 \times 8} = \frac{96}{168}$

$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 3 \times 7}{8 \times 3 \times 7} = \frac{105}{168}$

$\frac{96}{168} < \frac{105}{168} < \frac{112}{168}$

Cédric

C'est donc Cédric qui a la plus grande proportion de consonnes dans son prénom.

Et si nous vérifions avec les valeurs approchées données par la calculatrice ?

$\frac{2}{3} \approx 0,67$ $\frac{4}{7} \approx 0,57$ $\frac{5}{8} = 0,625$ → C'est ok.

Exercice 18 : Pour savoir jusqu'où prolonger la droite graduée, je vais examiner les valeurs qu'il faudra y placer : dépassent-elles 2 ? Si oui, de combien ?

1) et 2) $0,4$; $\frac{3}{10}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$ et $\frac{21}{40}$ sont plus petits que 1.

$\frac{7}{7} = 1$

$1,3$; $\frac{14}{10} = 1,4$; $\frac{3}{2} = 1,5$ $\frac{8}{5} = \frac{16}{10} = 1,6$ et $1 + \frac{7}{10} = 1 + 0,7 = 1,7$ sont tous compris entre 1 et 2

→ pas besoin de prolonger la droite graduée.

$\frac{21}{40} = 0,525$

```
 2 1,0 0 0 | 40
-2 0 0     |-----
   1 0 0   | 0,525
 -   8 0
     2 0 0
   - 2 0 0
         0
```

Nombres inférieurs à 1	Nombres égaux à 1	Nombres supérieurs à 1.
$0,4 = \frac{2}{5}$	$\frac{7}{7}$	$1,3$
$\frac{3}{10}$		$\frac{14}{10}$
$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$
$\frac{21}{40}$		$\frac{8}{5}$
		$1 + \frac{7}{10}$

Exercice 19 :

a) $\frac{13}{16} + \frac{4}{16} < 1$ $\boxed{\text{FAUX}}$ car $\frac{13}{16} + \frac{4}{16} = \frac{17}{16}$

et $\frac{17}{16} > 1$ car $17 > 16$

b) $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$ $\boxed{\text{VRAI}}$ car $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8} = 1$.

c) Si l'on multiplie $\frac{15}{13}$ par 15, on obtient 13

$\boxed{\text{FAUX}}$ C'est par 13 qu'il faudrait multiplier $\frac{15}{13}$ pour obtenir 15.

Si on multiplie $\frac{15}{13}$ par 15, on obtient

$\frac{15}{13} \times 15 = \frac{15 \times 15}{13} = \frac{255}{13}$

et $\frac{255}{13} \simeq 17{,}31$ n'est pas un entier ni même un nombre décimal.

d) Le nombre manquant dans l'égalité

$3 \times \ldots = 4$ est $\frac{4}{3}$. $\boxed{\text{VRAI}}$

car $\frac{4}{3} \times 3 = 4$

e) Le quotient de 24,6 par 3 est un nombre rationnel $\boxed{\text{VRAI}}$ car $24{,}6 : 3 = \frac{24{,}6}{3} = \frac{24{,}6 \times 10}{3 \times 10} = \frac{246}{30}$

$\frac{246}{30}$ est une fraction (le quotient de 2 entiers)

Le quotient de 24,6 par 3 est un nombre rationnel, car on peut l'écrire sous la forme d'une fraction.

Exercice 20 :

a) $1 + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}$

b) $2 + \frac{1}{5} \left(= \frac{2}{1} + \frac{1}{5} \right) = \frac{2 \times 5}{1 \times 5} + \frac{1}{5} = \frac{10}{5} + \frac{1}{5} = \boxed{\frac{11}{5}}$

On peut écrire directement

c) $5 + \frac{1}{2} \left(= \frac{5}{1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5 \times 2}{1 \times 2} + \frac{1}{2} = \frac{10}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{11}{2}}$

d) $4 + \frac{3}{7} = \frac{4 \times 7}{1 \times 7} + \frac{3}{7} = \frac{28}{7} + \frac{3}{7} = \boxed{\frac{31}{7}}$

e) $2 - \frac{1}{2} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$

f) $7 - \frac{1}{10} = \frac{7 \times 10}{1 \times 10} - \frac{1}{10} = \frac{70}{10} - \frac{1}{10} = \boxed{\frac{69}{10}}$

g) $1 - \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3}{1 \times 3} - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$

h) $4 - \frac{1}{4} = \frac{4 \times 4}{1 \times 4} - \frac{1}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{15}{4}}$

Une fois que vous êtes bien entraînés, vous pourrez vous dispenser d'écrire l'une ou l'autre de ces 2 étapes. Mais laissez-en au moins une, afin que le correcteur comprenne votre raisonnement.

Exercice 21. Recherche préalable :

$\boxed{3 \times \frac{1}{4}} = \frac{3 \times 1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}} = \boxed{0{,}75}$

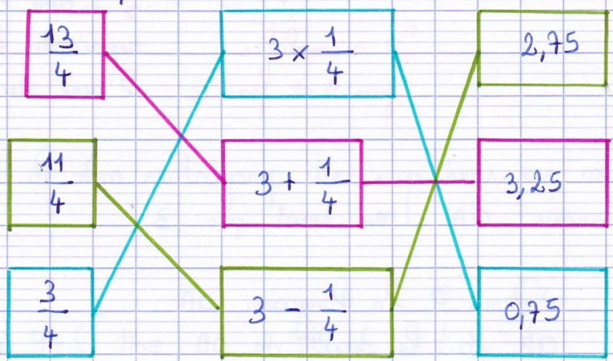
$\boxed{3 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{1} + \frac{1}{4} = \frac{3 \times 4}{1 \times 4} + \frac{1}{4} = \frac{12}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{13}{4}}$

Mais aussi : $3 + \frac{1}{4} = 3 + 0{,}25 = \boxed{3{,}25}$

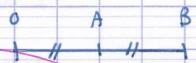
Suite de l'exercice 21 : $\boxed{3 - \frac{1}{4}} = \frac{3 \times 4}{1 \times 4} - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{11}{4}}$

Mais aussi : $3 - \frac{1}{4} = 3 - 0,25 = \boxed{2,75}$

C'est pourquoi :

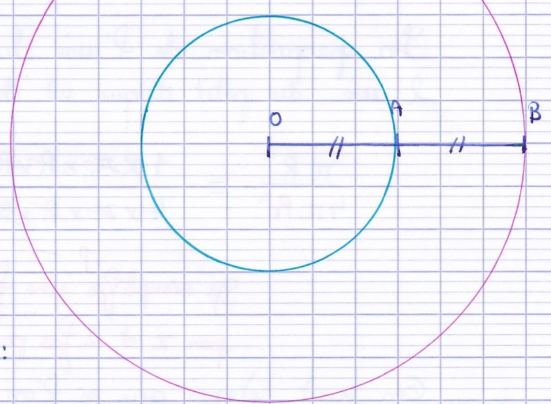


Exercice 22 : 1) Comme A est le milieu de [OB], nécessairement, la longueur OA représente **la moitié** soit $\frac{1}{2}$ de la longueur OB.



2) La formule qui donne l'aire d'un disque est :

$\boxed{\pi \times \text{rayon}^2}$



Avec OA = 3 et OB = 6 :

L'aire du petit disque est $\pi \times 3^2 = \pi \times 9 = 9\pi$

L'aire du grand disque est $\pi \times 6^2 = \pi \times 36 = 36\pi$

La proportion de l'aire du grand disque (celui de rayon OB) que représente l'aire du petit disque (celui de rayon OA) est :

$$\frac{9\pi}{36\pi} = \frac{\cancel{9} \times 1 \times \cancel{\pi}}{\cancel{9} \times 4 \times \cancel{\pi}} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Je simplifie par 9 et par π

→ L'aire du petit disque représente **le quart** de l'aire du grand disque.

On va voir que cette proportion reste la même, même lorsque OA ne vaut pas 3.

Notons R la longueur OA.
OB fait le double de OA, soit $2 \times R$ que l'on note $2R$.

L'aire du petit disque est : $\pi \times R^2 = \pi R^2$

L'aire du grand disque est : $\pi \times (2R)^2 = \pi \times 2R \times 2R = 4\pi R^2$

La proportion de l'aire du grand disque que représente l'aire du petit disque est donc :

$$\frac{\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{1 \times \cancel{\pi} \times \cancel{R} \times \cancel{R}}{4 \times \cancel{\pi} \times \cancel{R} \times \cancel{R}} = \boxed{\frac{1}{4}}$$ ← Même résultat

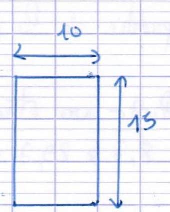
Je simplifie une fois par π et 2 fois par R

On peut retenir que si l'on multiplie par 2 les dimensions d'une figure, on multiplie alors son aire par 4.

Exercice 23 . 1) Pour publier une photo sur instagram, mieux vaut que son format soit carré, donc que :

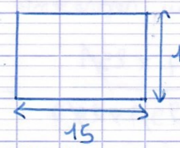
$$\frac{\text{weight}}{\text{height}} = \frac{\text{largeur}}{\text{hauteur}} = \frac{1}{1} = 1:1$$

2) $\frac{10}{15} = \frac{2\times\cancel{5}}{3\times\cancel{5}} = \frac{2}{3}$



en orientation portrait

$\frac{15}{10} = \frac{3\times\cancel{5}}{2\times\cancel{5}} = \frac{3}{2} = 3:2$



en orientation paysage

→ Pour des tirages en 10x15, le format 3:2 semble le plus approprié.

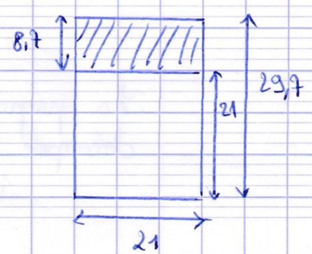
3) $\frac{1920}{1080} = \frac{192\times\cancel{10}}{108\times\cancel{10}} = \frac{192}{108} = \frac{48\times\cancel{4}}{27\times\cancel{4}} = \frac{48}{27} = \frac{\cancel{3}\times16}{\cancel{3}\times9} = \frac{16}{9} = 16:9$

→ C'est le format 16:9 qui semble le plus approprié pour une visualisation des photos (ou même des vidéos) sur un écran HD, ou au format HD.

4) Pour le format A4, aucun des rapports 1:1 ; 4:3 et 16:9 n'est égal à $\frac{29,7}{21}$. Et nous de calculer lequel des 4 formats prendra le plus de place sur le papier, afin qu'on ait à découper ou à supprimer le moins de marges possibles :

* Avec le format 1:1

* Si on choisit de découper le papier.

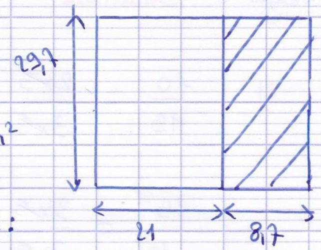


Soit on découpe 29% du papier

→ On doit découper $\underset{cm}{21} \times \underset{cm}{8,7} = \boxed{182,7\ cm^2}$ de papier. Ce qui représente $\frac{21\times8,7}{21\times29,7} = \frac{87}{297}$

soit environ 29% du papier

* Si on choisit de "perdre" une partie de la photo :



La photo va être rognée de $8,7 \times 29,7 = 23\ 967\ cm^2$

Soit on rogne 29% de la photo

Ce qui représente, en proportion :

$$\frac{8,7\times\cancel{29,7}}{29,7\times\cancel{29,7}} = \frac{87}{297} = \frac{3\times29}{3\times99} = \boxed{\frac{29}{99}} \approx 0,29$$

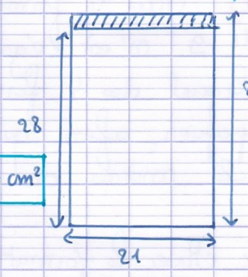
$\frac{29}{99}$ de la photo sera rognée, soit environ 29%

→ on a une perte d'environ 29% soit du papier, soit de la photo.

* Avec le format 4:3 . Comparons $\frac{4}{3}$ et $\frac{29,7}{21}$

$\frac{29,7}{21} = \frac{297}{210} = \frac{3\times99}{3\times70} = \boxed{\frac{99}{70}}$ → bof. Autant mettre $\frac{4}{3}$ sur 21.

$\frac{4}{3} = \frac{4\times7}{3\times7} = \boxed{\frac{28}{21}}$ → intéressant car c'est presque $\frac{29,7}{21}$



La marge à découper sur la feuille A4 est petite.

Elle sera de $\underset{cm}{1,7} \times \underset{cm}{21} = \boxed{35,7\ cm^2}$

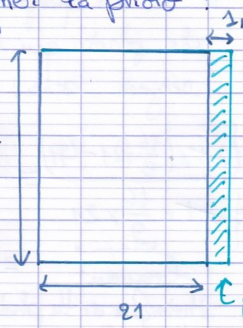
La proportion de la feuille A4 qui aura été découpée sera :

$$\frac{1,7\times\cancel{21}}{29,7\times\cancel{21}} = \frac{17}{297} \simeq 0,057$$ soit environ 5,7%.

Suite de l'exercice 23 question 4.

Notre photo est au format 4 : 3.
On veut l'imprimer sur une feuille A4.

Et si, au lieu de découper le papier, on choisit de rogner la photo ?



← partie de la photo rognée.

La photo au format 4:3 a une hauteur de 29,7 cm.
Sa largeur vaut donc $\frac{3}{4} \times 29,7 = 22,275$ cm

(Là je parle en orientation "portrait". Pour une orientation "paysage", échangez les mots "hauteur" et "largeur")

La proportion de la photo qui aura été rogné est de :

partie rognée, taille que devrait faire la photo →

$$\frac{1,275 \times \cancel{29,7}}{22,275 \times \cancel{29,7}} = \frac{12750}{22\,275} = \boxed{\frac{17}{297}} \approx 0,057 \text{ soit } \boxed{5,7\%}$$

→ Quand on cherche à imprimer une photo 4:3 sur du format A4, on a une perte d'environ 5,7% soit du papier si on le découpe, soit de la photo si on la rogne.

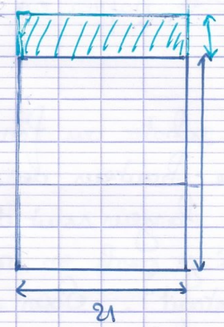
* Avec le format 16:9

* Si on découpe le papier : Comparons $\frac{16}{9}$ et $\frac{29,7}{21}$.

Nous permet de constater que, en mode portrait, la photo est plus "haute" que la feuille A4

$$\frac{16}{9} = \frac{16 \times 7}{9 \times 7} = \frac{112}{63} \qquad \frac{29,7}{21} = \frac{29,7 \times 3}{21 \times 3} = \frac{89,1}{63}$$

Cela signifie que si je garde une largeur de 21 cm, la photo en 16 : 9 devrait faire $\frac{112}{3} \approx 37,3$ cm de haut.



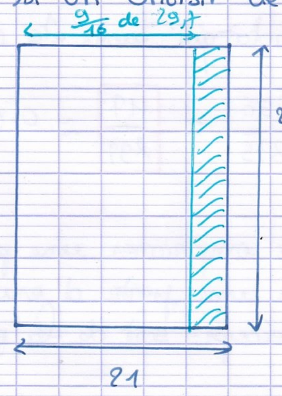
La proportion de photo qui sera rognée sera :

partie rognée / une théorique de la photo (longueur théorique de la photo)

$$\frac{\cancel{21} \times \left(\frac{16}{9} \times 21 - 29,7\right)}{\cancel{21} \times \frac{16}{9} \times 21} = \frac{\frac{16 \times 21}{9} - \frac{29,7 \times 9}{9}}{\frac{16 \times 21}{9}} = \frac{229}{1120} \approx 0,20$$

→ environ 20% de la photo sera rognée

Et si on choisit de découper le papier ?



$$\frac{16}{9} \;\Big|\; \frac{29,7}{\frac{9 \times 29,7}{16}}$$

↑ largeur de photo en cm

La partie à découper sera de :

$$29,7 \times \left(21 - \frac{9}{16} \times 29,7\right)$$

Donc la proportion de papier découpée sera :

$$\frac{\cancel{29,7} \times \left(21 - \frac{9}{16} \times 29,7\right)}{\cancel{29,7} \times 21} = \frac{21 - \frac{9}{16} \times 29,7}{21} = \frac{229}{1120}$$

$\approx 0,20$ soit 20% environ.

→ environ 20% du papier devra être découpé.

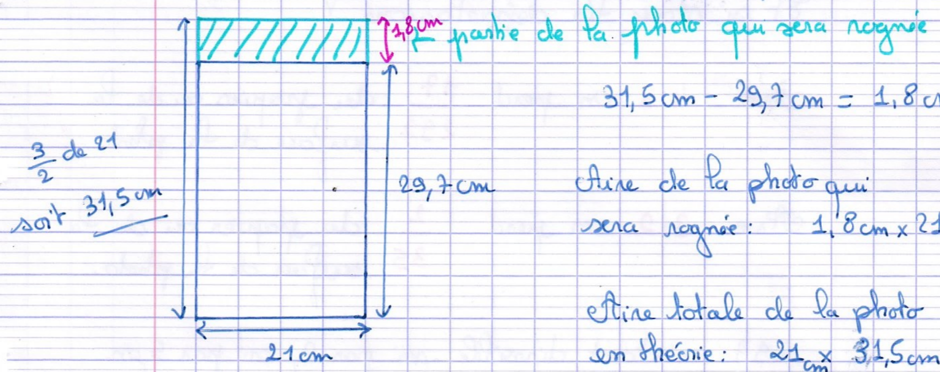
Fin de l'exercice 23 - question 4.

Etudions maintenant le cas où l'on souhaite imprimer une photo au format 3:2 sur du papier A4.

Comparons : $\frac{3}{2}$ et $\frac{29,7}{21}$.

$\frac{3}{2} = \frac{3 \times 21}{2 \times 21} = \frac{63}{42}$ $\frac{29,7}{21} = \frac{29,7 \times 2}{21 \times 2} = \frac{59,4}{42}$

la photo est plus haute que la feuille A4



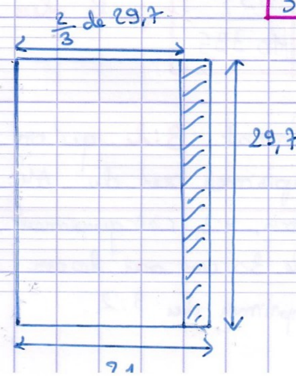
31,5 cm − 29,7 cm = 1,8 cm

Aire de la photo qui sera rognée : 1,8 cm × 21 cm

Aire totale de la photo en théorie : 21 cm × 31,5 cm

Proportion de la photo qui sera rognée : $\frac{1,8 \times \cancel{21}}{\cancel{21} \times 31,5} = \frac{18}{315} = \frac{2}{35}$

avec $\boxed{\frac{2}{35}} \approx 0,057$ soit $\boxed{\text{environ } 5,7\%}$



La proportion de la feuille A4 qui sera découpée sera :

$\frac{(21 - \frac{2}{3} \times 29,7) \times \cancel{29,7}}{21 \times \cancel{29,7}}$ } aire découpée / } aire totale

soit $\boxed{\frac{2}{35}}$ soit $\boxed{\text{environ } 5,7\%}$

Bilan : les format 1:1 et 16:9 ne sont pas avantageux, car on rogne la photo ou découpe le papier de 29 % environ pour le format 1:1 et de 20 % environ pour le format 16:9.

> Ce sont les formats 4:3 et 3:2 qui semblent les plus appropriés pour les tirages au format A4, avec une perte de seulement 5,7 % environ de la photo ou du papier.

Et si nous les départagions ?

Avec 4:3 on perd $\frac{17}{297}$ du papier ou de la surface de la photo.

Avec 3:2 on perd $\frac{2}{35}$ du papier ou de la surface de la photo.

297 n'étant divisible ni par 7, ni par 5, on réduit sur 297 × 35.

$\frac{17}{297} = \frac{17 \times 35}{297 \times 35} = \boxed{\frac{595}{10395}}$

$\frac{2}{35} = \frac{2 \times 297}{35 \times 297} = \boxed{\frac{594}{10395}}$ ← le plus petit

> C'est donc avec le format 3:2 qu'on a le moins de perte pour imprimer sur du A4.

mais bon, 4:3, c'est quasiment aussi bien.

Remarque : Une feuille de 30 cm sur 20 cm serait idéale pour imprimer du 3:2.