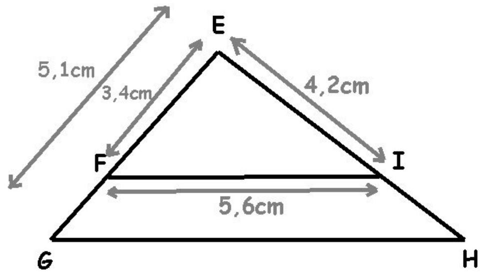
3ème – 10 exercices de base pour apprendre à appliquer le théorème de Thalès – Corrigés

en gris : des commentaires pour vous aider, qui ne sont pas à écrire dans la rédaction.

Code couleur lors de l'application d'un théorème :
(pas besoin de couleurs dans la copie : ce sont de repères que je vous donne)
hypothèses en bleu
théorème en rose
(on n'est pas toujours obligé de citer le théorème utilisé, mais s'il porte un nom, comme le théorème de Pythagore ou le théorème de Thalès, on cite son nom)
conclusion en vert

Exercice 1 :



Sur la figure ci-contre, on a :
F ∈ [EG]
I ∈ [EH]
(FI)//(GH)
1) Calculer la longueur GH.
2) Calculer la longueur EH.
3) Calculer la longueur IH.

Corrigé :

1) On sait que : (au choix : ça signifie exactement la même chose)

- F appartient à la droite (EG)
- I appartient à la droite (EH)

- E, F, G sont alignés d'une part
- E, I, H sont alignés d'autre part

- Et que (FI) et (GH) sont parallèles.

On applique le théorème de Thalès :

On a donc[1] : $\frac{EF}{EG} = \frac{EI}{EH} = \frac{FI}{GH}$

Comme on connaît EF, EG et FI et qu'on cherche GH, on utilise : donc, en particulier : $\frac{EF}{EG} = \frac{FI}{GH}$

On remplace les longueurs connues par leur valeur : soit $\frac{3,4}{5,1} = \frac{5,6}{GH}$

Donc : $GH = \frac{5,1 \times 5,6}{3,4} = 8,4$. GH mesure $\boxed{8,4 \text{ cm.}}$

2) On montré au 1) que $\frac{EF}{EG} = \frac{EI}{EH} = \frac{FI}{GH}$.

Comme on connaît EF, EI et FI et qu'on cherche à calculer EH, on utilise : donc, en particulier : $\frac{EF}{EG} = \frac{EI}{EH}$

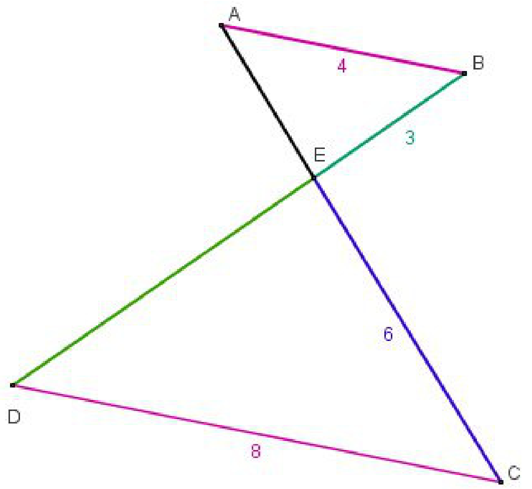
donc $\frac{3,4}{5,1} = \frac{4,2}{EH}$ donc $EH = \frac{5,1 \times 4,2}{3,4} = 6,3$. EH mesure donc $\boxed{6,3 \text{ cm.}}$

3) Comme I appartient au segment [EH], on a $IH = EH - EI$. Donc $IH = 6,3 - 4,2 = 2,1$
IH mesure $\boxed{2,1 \text{ cm.}}$

1 On n'est pas dans une rédaction de français, pas besoin d'effets de style : en maths, répétez autant de fois « donc » que vous faites des déductions. Vous pouvez aussi répéter « on a ». Pour rédiger en mathématiques, seules la logique et la rigueur importent. « donc » traduit une implication. « soit » traduit une équivalence (= une implication dans les deux sens).

Exercice 2 :

Sur la figure ci-contre, E appartient à la droite (BD) et à la droite (AC),
On sait aussi que (AB) et (CD) sont parallèles,
et les mesures sont données en centimètres.



1) Calculer la longueur EA.
2) Calculer la longueur AC.
3) Calculer la longueur ED.
4) Calculer la longueur BD.

Corrigé :

1) On sait que :

- E appartient à la droite (AC) • E, A et C sont alignés
- E appartient à la droite (BD) • E, B et D sont alignés
- et que (AB)//(DC)

D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{EA}{EC}=\frac{EB}{ED}=\frac{AB}{DC}$

On connaît AB, DC et EC. On veut calculer EA. On a donc, en particulier: $\frac{EA}{EC}=\frac{AB}{DC}$, soit $\frac{EA}{6}=\frac{4}{8}$,

donc $EA=\frac{6\times 4}{8}=\frac{\cancel{2}\times 3\times 4}{\cancel{2}\times 4\times 1}=3$. La longueur $\boxed{\text{EA vaut 3 cm.}}$

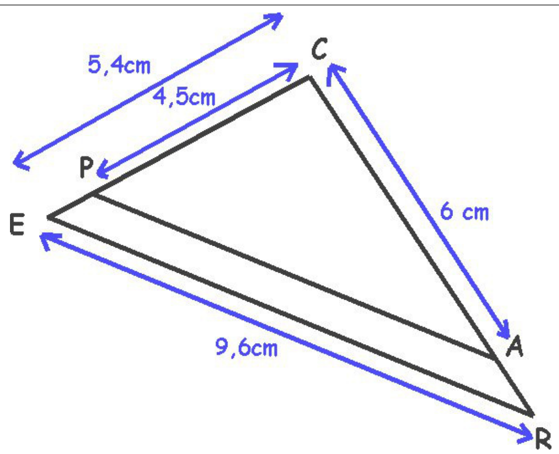
2) Comme le point E appartient au segment [AC], $AC=AE+EC=3+6=9$.
La longueur $\boxed{\text{AC est de 9 cm}}$.

3) On a vu au 1) que $\frac{EA}{EC}=\frac{EB}{ED}=\frac{AB}{DC}$, donc $\frac{EB}{ED}=\frac{AB}{DC}$, soit $\frac{3}{ED}=\frac{4}{8}$, donc $ED=\frac{3\times 8}{4}=\frac{3\times 2\times \cancel{4}}{\cancel{4}\times 1}=6$.
$\boxed{\text{ED vaut 6 cm.}}$

4) Comme le point E appartient au segment [DB], on a : $BD=BE+ED=3+6=9$. $\boxed{\text{BD=9 cm}}$

Exercice 3 :

Sur la figure ci-contre, on a :
P ∈[2] [CE]
A ∈ [CR]
(PA)//(ER)



1) Calculer la longueur PA.
2) Calculer la longueur CR.
3) Calculer la longueur AR.

2 Le symbole ∈ signifie « appartient à » ou « est élément de », pas seulement « appartient » comme le croient souvent les élèves.

Corrigé :

1) On sait que :

- P appartient à la droite (EC)
- Les points E, P, C sont alignés
- A appartient à la droite (CR)
- Les points C, A, R sont alignés
- Les droites (PA) et (ER) sont parallèles.

On applique le théorème de Thalès

On en déduit que : $\frac{CP}{CE}=\frac{CA}{CR}=\frac{PA}{ER}$

On a donc en particulier : $\frac{CP}{CE}=\frac{PA}{ER}$, soit $\frac{4,5}{5,4}=\frac{PA}{9,6}$, donc $PA=\frac{4,5\times 9,6}{5,4}$, donc $\boxed{PA=8 \text{ cm}}$.

2) On a démontré au 1) que $\frac{CP}{CE}=\frac{CA}{CR}=\frac{PA}{ER}$. Donc on a $\frac{CP}{CE}=\frac{CA}{CR}$, soit $\frac{4,5}{5,4}=\frac{6}{CR}$, donc $CR=\frac{6\times 5,4}{4,5}$.

On trouve : $\boxed{CR=7,2 \text{ cm.}}$

3) A appartient au segment [CR], donc $AR=CR-CA=7,2-6=1,2$. $\boxed{AR=1,2 \text{ cm.}}$

Exercice 4 : Sur la figure ci-contre, on a :

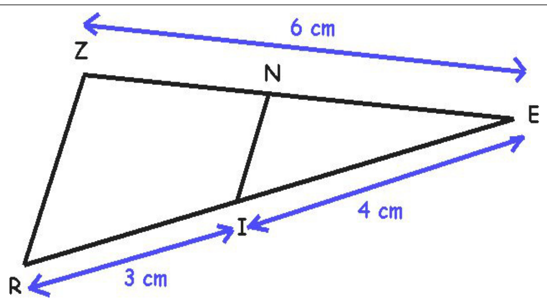
$N \in [ZE]$

$I \in [RE]$

et (ZR)//(IN)

1) Calculer la longueur NE.

2) Calculer la longueur ZN.



Corrigé :

1) On sait que :

- N appartient à la droite (ZE)
- Les points E, N, Z sont alignés
- I appartient à la droite (RE)
- Les points E, I, R sont alignés
- Les droites (ZR) et (IN) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{EN}{EZ}=\frac{EI}{ER}=\frac{NI}{ZR}.$$

On a donc en particulier : $\frac{EN}{EZ}=\frac{EI}{ER}$ et comme I appartient au segment [ER], ER=EI+IR=4+3=7 (en cm).

Donc $\frac{EN}{6}=\frac{4}{7}$ donc $EN=\frac{4\times 6}{7}=\frac{24}{7}$. $\boxed{NE=\frac{24}{7}}$ (valeur exacte) $\boxed{NE\approx 3,4 \text{ cm}}$ (valeur arrondie à 0,1 cm près)

2) On sait que EZ=6 cm et que $EN=\frac{24}{7}$ cm. Comme N appartient au segment [EZ], $ZN=EZ-NE$.

En toute rigueur, il faut calculer avec les valeurs exactes. Ici, dans une simple soustraction dont un seul des termes est arrondi à 0,1 cm près, on obtiendra aussi un arrondi à 0,1 cm si on calcule avec la valeur approchée.

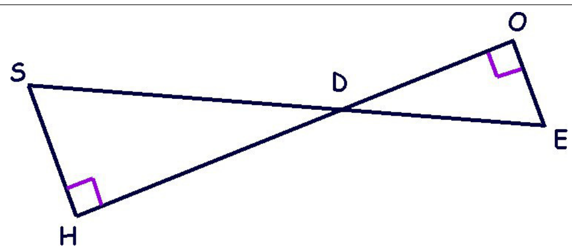
Calcul avec la valeur exacte : $ZN=6-\frac{24}{7}=\frac{6\times7}{1\times7}-\frac{24}{7}=\frac{42}{7}-\frac{24}{7}=\frac{18}{7}$ $\boxed{ZN=\frac{18}{7}}$ cm $\boxed{ZN\approx2{,}6\text{ cm.}}$

Calcul avec la valeur arrondie : $ZN\approx6-3{,}4$ donc $\boxed{ZN\approx2{,}6\text{ cm}}$

Exercice 5 : Sur la figure ci-contre, on a :

- S, D, E alignés et H, D, O alignés.
- DH=9 cm, OE=2cm et DO=3,6 cm

Calculer en justifiant la longueur SH.



Corrigé :

Dans cet exercice, le parallélisme ne fait pas partie des données de l'énoncé. Il va donc falloir le prouver avant de pouvoir appliquer le théorème de Thalès.

On sait que les points H, D et O sont alignés, donc que (DH), (DO) et (HO) sont une même droite.

Les codages des angles droits nous indiquent que (SH) est perpendiculaire à (HO) et que (OE) l'est aussi.
Or deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles.(C'est une propriété-théorème vue en 6ème) Donc (SH) et (OE) sont parallèles.

Maintenant qu'on a prouvé le parallélisme qui nous manquait, on peut appliquer le théorème de Thalès.

On sait que :
- D appartient à la droite (SE) • S, D, E sont alignés.
- D appartient à la droite (OH) • H, D, O sont alignés.

Et que :
- Les droites (SH) et (OE) sont parallèles.[3]

On applique le théorème de Thalès

On en déduit que : $\frac{DE}{DS}=\frac{DO}{DH}=\frac{OE}{SH}$

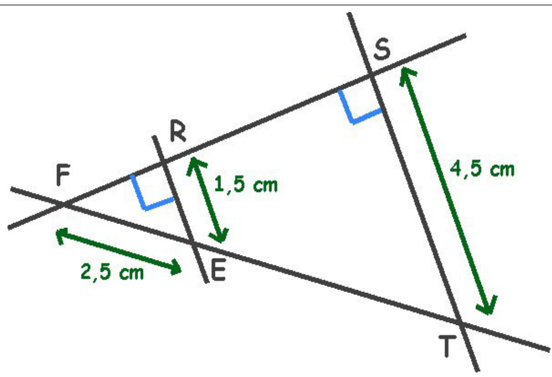
On a en particulier : $\frac{DO}{DH}=\frac{OE}{SH}$, soit $\frac{3{,}6}{9}=\frac{2}{SH}$ donc $SH=\frac{9\times2}{3{,}6}=5$. $\boxed{SH=5\text{ cm}}$

Exercice 6 : La figure ci-contre est formée de 4 droites.

1) Utilise le théorème de Thalès (en justifiant qu'on peut l'appliquer) pour calculer la longueur FT.

2) Utilise le théorème de Pythagore pour calculer la longueur FS.

3) Calcule la longueur FR, au choix, avec le théorème de Pythagore ou avec le théorème de Thalès.



Corrigé :

1) Comme la figure est formée de 4 droites, (FR), (RS) et (FS) sont une même droite.

3 Remarquez comme la conclusion du théorème précédent devient une hypothèse du théorème suivant.

D'après les codages des angles droits sur la figure, on sait que les droites (RE) et (ST) sont toutes les deux perpendiculaires à (FS). Or deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles.
Donc (RE) et (ST) sont parallèles.

On sait que :
- R appartient à la droite (FS)
- E appartient à la droite (FT)
- Les points F, R, S sont alignés
- Les points F, E, T sont alignés

et que :
- Les droites (RE) et (ST) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{FR}{FS}=\frac{FE}{FT}=\frac{RE}{ST}$$

En particulier, on a : $\frac{FE}{FT}=\frac{RE}{ST}$, soit $\frac{2,5}{FT}=\frac{1,5}{4,5}$, donc $FT=\frac{2,5\times 4,5}{1,5}=7,5$. $\boxed{FT=7,5 \text{ cm.}}$

2) On sait que le triangle FST est rectangle en S, puisqu'un angle droit en S est codé sur la figure.
D'après le théorème de Pythagore, on a : $FT^2=FS^2+ST^2$, soit $7,5^2=FS^2+4,5^2$, soit $56,25=FS^2+20,25$, donc $56,25-20,25=FS^2$, donc $FS^2=36$.
FS étant une longueur en cm, donc un nombre positif, on a : $\boxed{FS=\sqrt{36}=6}$.[4] $\boxed{FS=6 \text{ cm.}}$

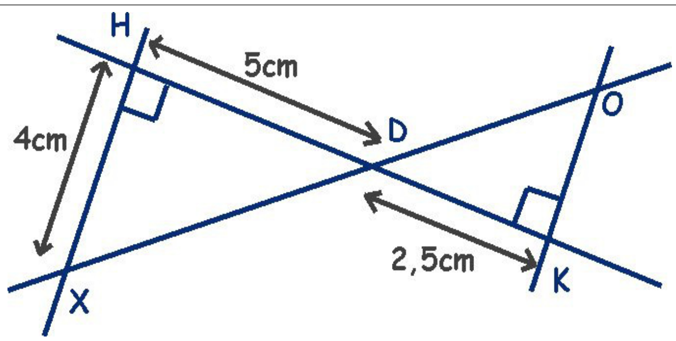
3) Solution 1 : avec le théorème de Pythagore :
On sait que le triangle FRE est rectangle en R, d'après l'angle droit codé sur la figure.
D'après le théorème de Pythagore, on a : $FE^2=FR^2+RE^2$, soit $2,5^2=FR^2+1,5^2$, soit $6,25=FR^2+2,25$.
Donc $6,25-2,25=FR^2$, donc $FR^2=4$, donc, comme FR est une longueur en cm, donc un nombre positif : $FR=\sqrt{4}$. $\boxed{FR= 2 \text{cm}}$

Solution 2 : avec le théorème de Thalès :
On a montré au 1) que : $\frac{FR}{FS}=\frac{FE}{FT}=\frac{RE}{ST}$.
On a donc, en particulier, $\frac{FR}{FS}=\frac{RE}{ST}$, soit $\frac{FR}{6}=\frac{1,5}{4,5}$, donc $FR=\frac{6\times 1,5}{4,5}=2$. $\boxed{FR=2 \text{ cm.}}$

Exercice 7 : La figure ci-contre est formée de 4 droites.

1) Calculer la longueur OK en justifiant la réponse.

2) Calculer la longueur DX et en donner une valeur arrondie à 0,1 cm près.



Corrigé :

1) On sait que H, D, K sont alignés puisque l'énoncé nous dit que la figure est composée de 4 droites.
Donc les droites (HD), (DK) et (HK) sont confondues.
Le codage des angles droits nous indique que $(HX)\perp(HK)$ et que $(OK)\perp(HK)$[5].
Comme deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles, (HX)//(OK).

4 $(-6)^2$ aussi est égal à 36. A priori, comme FS^2 vaut 36, FS pourrait valoir 6 ou -6. FS étant une longueur, on garde seulement la solution FS=6.
5 Le symbole $\perp$ signifie « est perpendiculaire à », et non « perpendiculaire » comme le pensent souvent les élèves.

On sait que :
- D appartient à la droite (HK)
- D appartient à la droite (OX)
- H, D, K sont alignés
- X, D, O sont alignés

et que
- (HX)//(OK)

D'après le théorème de Thalès, on a :

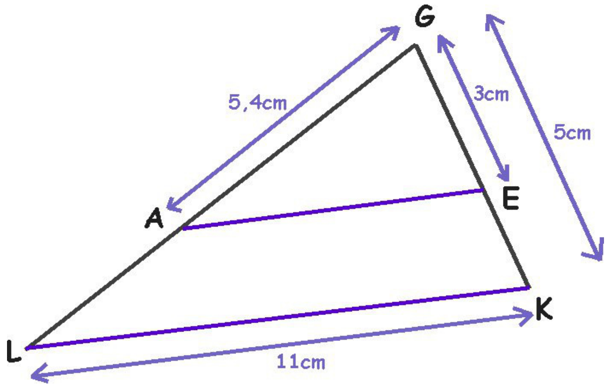
$$\frac{DK}{DH}=\frac{DO}{DX}=\frac{OK}{HX}.$$

On a donc en particulier : $\frac{DK}{DH}=\frac{OK}{HX}$, soit $\frac{2{,}5}{5}=\frac{OK}{4}$. Donc $OK=\frac{2{,}5\times 4}{5}=2$. $\boxed{OK=2 \text{ cm.}}$

2) Le triangle HDX est rectangle en H. On applique le théorème de Pythagore. On a donc : $DX^2=DH^2+HX^2$.
Donc $DX^2=5^2+4^2=25+16=41$. DX étant une longueur, donc un nombre positif, on a $DX=\sqrt{41}$.
$\boxed{DX\approx 6{,}4 \text{ cm}}$ (valeur arrondie à 0,1 cm près)

Exercice 8 : Sur la figure ci-contre,
$A \in [GL]$, $E \in [GK]$ et (AE)//(LK)

1) Calcule la longueur AE.
2) Calcule la longueur AL.



Corrigé :

1) On sait que :
- A appartient à la droite (GL)[6]
- E appartient à la droite (GK)
- Les points G, A et L sont alignés.
- Les points G, E et K sont alignés.

Et que :
- (AE)//(LK)

On applique le théorème de Thalès.

On en déduit que : $\frac{GA}{GL}=\frac{GE}{GK}=\frac{AE}{LK}$

On a en particulier : $\frac{GE}{GK}=\frac{AE}{LK}$, soit $\frac{3}{5}=\frac{AE}{11}$, donc $AE=\frac{3\times 11}{5}=6{,}6$. $\boxed{AE=6{,}6 \text{ cm}}$

2) Pour calculer AL, qui n'est pas un des côtés du grand triangle ni un des côtés du petit triangle, on va d'abord calculer GL.

On a vu au 1) que : $\frac{GA}{GL}=\frac{GE}{GK}=\frac{AE}{LK}$, donc, en particulier, $\frac{GA}{GL}=\frac{GE}{GK}$, soit $\frac{5{,}4}{GL}=\frac{3}{5}$.

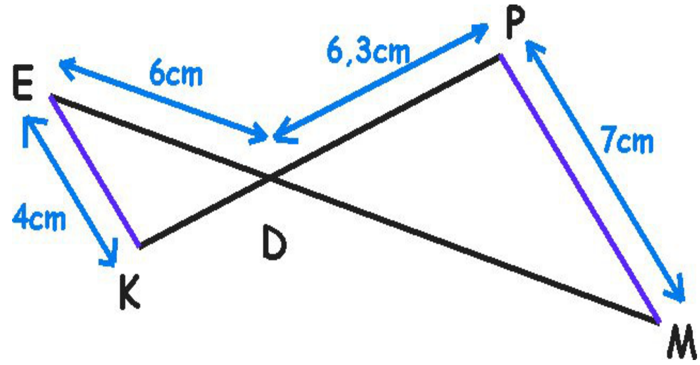
Donc $GL=\frac{5{,}4\times 5}{3}=9$. GL=9 cm.

Comme A appartient à [GL], on a : $AL=GL-GA=9-5{,}4=3{,}6$. $\boxed{AL=3{,}6 \text{ cm.}}$

6 L'énoncé dit même que A appartient au segment [GL]. S'il appartient au segment, il appartient aussi nécessairement à la droite. Pour appliquer le théorème de Thalès, on a besoin seulement qu'il appartienne à la droite. Mais si on dit qu'il appartient au segment, c'est bon aussi.

Exercice 9 : Sur la figure ci-contre,
D ∈ [PK], D ∈ [EM] et (PM)//(EK)

1) Calcule la longueur KD.
2) Calcule la longueur DM.



Corrigé :

1) On sait que :
- Le point D appartient à la droite (PK)
- Le point D appartient à la droite (EM)
- Les points P, D, K sont alignés
- Les points E, D, M sont alignés

et que :
- (PM)//(EK)

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{DK}{DP}=\frac{DE}{DM}=\frac{EK}{PM}.$$

On a donc en particulier : $\frac{DK}{DP}=\frac{EK}{PM}$, soit $\frac{DK}{6,3}=\frac{4}{7}$, donc $DK=\frac{6,3\times 4}{7}=3,6$. $\boxed{DK=3,6 \text{ cm.}}$

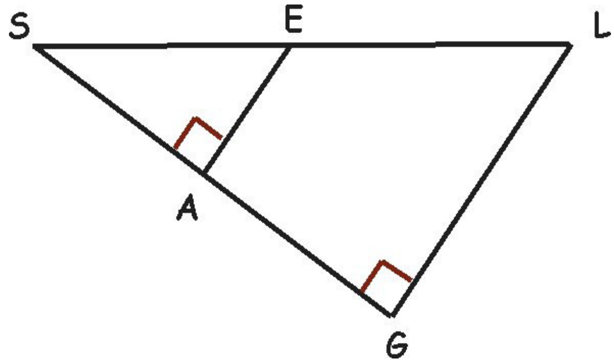
2) On a montré au 1) que $\frac{DK}{DP}=\frac{DE}{DM}=\frac{EK}{PM}$. Donc, en particulier, on a : $\frac{DE}{DM}=\frac{EK}{PM}$, soit $\frac{6}{DM}=\frac{4}{7}$.

Donc $DM=\frac{6\times 7}{4}=\frac{2\times 3\times 7}{2\times 2}=\frac{21}{2}=10,5$. $\boxed{DM=10,5 \text{ cm}}$

Exercice 10 : Sur la figure ci-contre :

E appartient au segment [SL]
A appartient au segment [SG]
On donne : SE=5 cm, SL=12 cm et GL=9 cm.

Détermine, en justifiant, la longueur du segment [EA]



Corrigé :

Comme A appartient au segment [SG], les droites (EA) et (LG) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (SG) d'après les codages des angles droits.
Or deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles, donc (EA)//(LG).

On sait que :
- E appartient à la droite (SL)
- A appartient à la droite (SG)
- S, E, L sont alignés.
- S, A, G sont alignés

et que
- (EA)//(LG)

(Le symbole // signifie « est parallèle à » et non pas « parallèle » comme les élèves le croient souvent.)

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{SE}{SL}=\frac{SA}{SG}=\frac{EA}{LG}$$

Donc, en particulier, on a : $\frac{SE}{SL}=\frac{EA}{LG}$, soit $\frac{5}{12}=\frac{EA}{9}$, donc $EA=\frac{9\times 5}{12}=\frac{3\times 3\times 5}{3\times 4}=\frac{15}{4}=3,75$. $\boxed{EA=3,75 \text{ cm}}$