Exercices sur les évolutions successives en pourcentages
Corrigés

Partie 1 : calculer une évolution globale correspondant à des évolutions successives.

Exercice 1 : Notons P_0 le prix du repas de l'année dernière, P_1 celui de cette année et P_2 celui de l'année prochaine.

$$P_0 \xrightarrow{\substack{-1\ \% \\ \times 0{,}99}} P_1 \xrightarrow{\substack{+2\ \% \\ \times 1{,}02}} P_2$$

$$P_0 \xrightarrow[\times 1{,}0098]{} P_2$$

$P_2=P_0\times 0{,}99\times 1{,}02=P_0\times 1{,}0098$ 1,0098>1 donc on a une augmentation globale.
$1{,}0098-1=0{,}0098=0{,}98\ \%$
Entre l'année dernière et l'année prochaine, le prix du repas aura augmenté de 0,98 %.
Il aura donc globalement augmenté entre l'année dernière et l'année prochaine.

Exercice 2 : Notons N_0 le nombre d'adhérents à l'association en 2005, N_1 le nombre d'adhérents à l'association en 2006 et N_2 le nombre d'adhérents à l'association en 2007.

$$N_0 \xrightarrow{\substack{-8\ \% \\ \times 0{,}92}} N_1 \xrightarrow{\substack{+3\ \% \\ \times 1{,}03}} N_2$$

$$N_0 \xrightarrow[\times 0{,}9476]{} N_2$$

$N_2=N_0\times 0{,}92\times 1{,}03=N_0\times 0{,}9476$ 0,946<1 donc on a une diminution globale.
$0{,}9476-1=-0{,}0524=-5{,}24\ \%$
Le nombre d'adhérents a diminué (de 5,24%) entre 2006 et 2008.

Exercice 3 : Notons P_0 la population de la ville en 1994, P_1 la population de la ville en 2000 et P_2 la population de la ville en 2006.

$$P_0 \xrightarrow{\substack{+10{,}3\% \\ \times 1{,}103}} P_1 \xrightarrow{\substack{-9\ \% \\ \times 0{,}91}} P_2$$

$$P_0 \xrightarrow[\times 1{,}00373]{} P_2$$

$P_2=P_0\times 1{,}103\times 0{,}91=P_0\times 1{,}00373$ 1,00373>1 donc on a une augmentation globale.
$1{,}00373-1=0{,}00373=0{,}373\ \%$
Entre 1994 et 2006, la population de la ville a augmenté de 0,373 %.

Exercice 4 : 1) Notons P_0 le prix du bœuf avant son augmentation de 6 % en 2005, P_1 le prix du bœuf entre cette augmentation de 6 % et l'augmentation de 5 % en 2006, et P_2 le prix du bœuf après l'augmentation de 5 % en 2006.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] P_0 \arrow[r, "\substack{+6\% \\ \times 1{,}06}"] \arrow[rr, bend right=20, "\times 1{,}00373"'] & P_1 \arrow[r, "\substack{+5\ \% \\ \times 1{,}05}"] & P_2 \end{tikzcd}$$

$P_2 = P_0 \times 1{,}06 \times 1{,}05 = 1{,}113$ 1,113>1 donc on a une augmentation globale.
$1{,}113 - 1 = 0{,}113 = 11{,}3\ \%$

Le prix du bœuf a augmenté de 11,3 % au cours des années 2005 et 2006.

2) Notons C_0 la consommation de bœuf avant sa baisse de 2% en 2005, C_1 cette consommation entre la baisse de 2% de 2005 et la baisse de 6% de 2006, et C_2 cette consommation après la baisse de 6% en 2006.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] C_0 \arrow[r, "\substack{-2\ \% \\ \times 0{,}98}"] \arrow[rr, bend right=20] & C_1 \arrow[r, "\substack{-6\ \% \\ \times 0{,}94}"] & C_2 \end{tikzcd}$$

$C_2 = C_0 \times 0{,}98 \times 0{,}94 = C_0 \times 0{,}9212$ 0,9212<1 donc on a globalement une baisse.
$0{,}9212 - 1 = -0{,}0788 = -7{,}88\ \%$

La consommation de bœuf a donc baissé de 7,88 % au cours des deux années 2005 et 2006.

Exercice 5 :

Première évolution	Deuxième évolution	Évolution globale
Augmentation de 20 %	Augmentation de 30 %	Augmentation de 56 %
Augmentation de 8 %	Augmentation de 14 %	Augmentation de 23,12 %
Augmentation de 89 %	Augmentation de 23 %	Augmentation de 132,47 %

$1{,}2 \times 1{,}3 = 1{,}56$ 1,56>1 $\rightarrow$hausse $1{,}56 - 1 = 0{,}56 = 56\ \%$
$1{,}08 \times 1{,}114 = 1{,}2312$ 1,2312>1 $\rightarrow$hausse $1{,}2312 - 1 = 0{,}2312 = 23{,}12\ \%$
$1{,}89 \times 1{,}23 = 2{,}3247$ $2{,}3247 > 1$ $\rightarrow$hausse $2{,}3247 - 1 = 1{,}3247 = 132{,}47\ \%$

Exercice 6 :

Première évolution	Deuxième évolution	Évolution globale
Diminution de 20 %	Diminution de 30 %	Baisse de 44 %
Diminution de 8 %	Diminution de 14 %	Baisse de 20,88 %
Diminution de 89 %	Diminution de 23 %	Baisse de 91,53 %

$0,8\times 0,7=0,56$ $\quad 0,56<1 \rightarrow$ baisse $\quad 0,56-1=-0,44=-44\ \%$

$0,92\times 0,86=0,7912$ $\quad 0,7912<1 \rightarrow$baisse $\quad 0,7912-1=-0,2088=-20,88\ \%$

$0,11\times 0,77=0,0847$ $\quad 0,0847<1 \rightarrow$ baisse $\quad 0,0847-1=-0,9153=-91,53\ \%$

Exercice 7 :

Première évolution	Deuxième évolution	Évolution globale
Augmentation de 28 %	Diminution de 40 %	Diminution de 23,2 %
Augmentation de 53 %	Diminution de 29 %	Augmentation de 8,63 %
Diminution de 36 %	Augmentation de 26 %	Diminution de 19,36 %
Diminution de 22 %	Augmentation de 44 %	Augmentation de 12,32 %

$1,28\times 0,6=0,768$ $\quad 0,768<1 \rightarrow$ baisse $\quad 0,768-1=-0,232=-23,2\ \%$

$1,53\times 0,71=1,0863$ $\quad 1,0863>1 \rightarrow$ hausse $\quad 1,0863-1=0,0863=8,63\ \%$

$0,64\times 1,26=0,8064$ $\quad 0,8064<1 \rightarrow$ baisse $\quad 0,8064-1=-0,1936=-19,36\ \%$

$0,78\times 1,44=1,1232$ $\quad 1,1232>1 \rightarrow$ hausse $\quad 1,1232-1=0,1232=12,32\ \%$

Exercice 8 :

Première évolution	Deuxième évolution	Évolution globale
Augmentation de 55 %	Augmentation de 11 %	Augmentation de 72,05 %
Diminution de 14 %	Diminution de 33 %	Diminution de 42,38 %
Augmentation de 11 %	Diminution de 10 %	Diminution de 0,1 %
Diminution de 19 %	Augmentation de 23 %	Diminution de 0,37 %
Augmentation de 41 %	Diminution de 42 %	Diminution de 18,22 %

$1,55\times 1,11=1,7205$ $\quad 1,7205>1 \rightarrow$ hausse $\quad 1,7205-1=0,7205=72,05\ \%$

$0,86\times 0,67=0,5762$ $\quad 0,5762<1 \rightarrow$ baisse $\quad 0,5762-1=-0,4238=-42,38\ \%$

$1,11\times 0,9=0,999$ $\quad 0,999<1 \rightarrow$ baisse $\quad 0,999-1=0,001=-0,1\ \%$

$0,81\times 1,23=0,9963$ $\quad 0,9963<1 \rightarrow$ baisse $\quad 0,9963-1=-0,0037=-0,37\ \%$

$1,41\times 0,58=0,8178$ $\quad 0,8178<1 \rightarrow$ baisse $\quad 0,8178-1=-0,1822=-18,22\ \%$

Exercice 9 : 1) FAUX.

$1{,}8\times 1{,}2=2{,}16$ — $2{,}16>1$ On a donc une hausse.
$2{,}16-1=1{,}16=116\ \%$ — Il s'agit d'une hausse de 116 %, pas de 100 %.

2) VRAI.

$0{,}2\times 0{,}8=0{,}16$ — $0{,}16<1$ On a donc une baisse.
$1-0{,}16=0{,}84=84\ \%$ — La baisse est bien de 84 %.

3) VRAI.
$1{,}2\times 1{,}2=1{,}44$ — $1{,}44>1$ donc on a bien une hausse.
$1{,}44-1=0{,}44=44\ \%$ — Cette hausse est bien de 44%.

4) FAUX.
$0{,}8\times 0{,}8=0{,}64$ — $0{,}64<1$ donc on a bien une baisse.
$0{,}64-1=-0{,}36=-36\ \%$ — Cette baisse est de 36 %, pas de 44 %.

5) FAUX. Pas possible : il ne s'agit pas de 5 % du même nombre.
On peut néanmoins faire un calcul pour le vérifier : $1{,}05\times 0{,}95=0{,}9975$.
$0{,}9975<1$, l'évolution globale est donc une baisse. (de 0,25 %)

Exercice 10 : Le cœfficient multiplicatif correspondant à deux hausses successives de 50 % est : $1{,}5\times 1{,}5=2{,}25$.

$$\begin{tikzcd}
\text{Prix initial} \arrow[r, "\times 1{,}5"] \arrow[rr, bend right, "\times 2{,}25"'] & \text{Prix intermédiaire} \arrow[r, "\times 1{,}5"] & \text{Prix final = 45 €}
\end{tikzcd}$$

Pour connaître le prix initial connaissant le prix final, il suffit donc de le diviser par 2,25 :
45 € ÷ 2,25 = 20 €. Le prix initial de cet article était donc de 20 €.

Exercice 11 : Les deux propositions sont équivalentes. En effet :

Dans le cas d'une réduction de 10 % sur le prix HT, on aura d'abord une baisse de 10 %, celle faite par le vendeur sur le prix HT, suivie d'une hausse de 20 % lors de l'ajout de la TVA : le prix final sera égal au prix initial multiplié par $0{,}9\times 1{,}2$.

Dans le cas d'une réduction de 10 % sur le prix TTC : on calcule d'abord le prix TTC en multipliant le prix HT par 1,2, puis on applique la réduction de 10 % en multipliant le prix TTC par 0,9. On paiera donc le prix initial multiplié par $1{,}2\times 0{,}9$, ce qui revient exactement au même que de l'avoir multiplié par $0{,}9\times 1{,}2$.

Pensons que si le prix HT a été baissé de 10 % avant application de la TVA, celle-ci aussi se trouve réduite de 10%.

En revanche, si les choses avaient été présentées de la manière suivante : on vous déduit du prix TTC 10 % du prix HT (proposition 1) ou 10 % du prix TTC (proposition 2), il aurait bien entendu été plus intéressant qu'on nous déduise 10 % du plus grand des deux prix, soit du prix TTC.

Exercice 12 : 1) Lors d'une année normale, la récolte rapporte à l'agriculteur le nombre de kilos de pommes vendus multiplié par son prix au kilo, soit $q\times p$ ou $p\times q$ ou pq .

Lors de l'année exceptionnelle, la récolte a augmenté de 40% : la production, en kg, est donc de $1{,}4\,q$. Mais le prix au kilo, lui, a baissé de 30% : il est donc de $0{,}7\,p$.

Lors de l'année exceptionnelle, si l'agriculteur vend toute sa récolte, elle lui rapportera donc : nombre de kilos vendus × prix au kilo = $1{,}4\,q\times 0{,}7\,p = 0{,}98\,pq$

2) Lors d'une année normale, la recette de l'agriculteur est égale à pq et lors de l'année exceptionnelle, elle est de $0{,}98\,pq$.
$0{,}98<1$ donc la recette de l'agriculteur aura diminué (de 2%) lors de l'année exceptionnelle.

Partie 2 : Calculer un prix après ou avant des évolutions successives d'un même pourcentage .

Exercice 13 : 1) La première année, le capital a augmenté de 10 %. Il a donc été multiplié par 1,1. $1000\times 1{,}1=1100$. Donc $\boxed{K_1=1100}$. Remarque : $K_1=1000\times 1{,}1^1$

La deuxième année, le capital a à nouveau augmenté de 10 %. Il a de nouveau été multiplié par 1,1. Donc $\boxed{K_2=1100\times 1{,}1=1210}$. Remarque : $K_2=1000\times 1{,}1^2$

2) Le capital acquis au bout de 10 ans est égal, aux arrondis près, en €, à $\boxed{K_{10}=1000\times 1{,}1^{10}\approx 2593{,}74}$

3) En toute logique, pour répondre à cette question, il faudrait résoudre l'inéquation : $1000\times 1{,}1^n\geqslant 2000$, mais c'est du niveau terminale ES ou S. *(Chapitres des exponentielles et du logarithme népérien)*
On recherche donc par tâtonnements avec la calculatrice à quel rang n on dépasse le capital de 2000 € :
On a remarqué qu'au bout de 2 ans, on est en-dessous des 2 000 et qu'au bout de 10 ans, on les a dépassés. On teste donc des valeurs entières supérieures à 2 et inférieures à 10.

On peut tester par tâtonnements, ou faire faire à la calculatrice un tableau de valeurs pour X variant de 2 à 10 avec un pas de 1 pour la fonction qui à X associe 1000×10^X .

On trouve : $K_7=1000\times 1{,}1^7\approx 1948{,}72$ et $K_8=1000\times 1{,}1^8\approx 2143{,}59$.

$K_7 < 2000$ et $K_8 > 2000$.

C'est donc à partir de 8 ans de placement que le capital aura doublé sur ce compte.

Remarque personnelle : ça existe, des comptes rémunérés à 10 % ?? Où ça, que j'y place mon argent ?? N'importe quoi, cet énoncé !

Exercice 14 : Sur la vitrine d'un magasin, on peut lire : « Liquidation définitive : chaque semaine, nous baissons les prix de la semaine précédente de 10 %. ».

1) Chaque semaine, les prix baissent de 10 %. Ils sont donc multipliés par 0,9.

Lors de la première semaine de liquidation, le manteau sera donc vendu :
200 € × 0,9 = 180 €

Lors de la deuxième semaine de liquidation, il sera vendu :
180 € × 0,9 = 162 € ou encore 200 € × $0{,}9^2$ = 162 €.

2) Lors de la 8ème semaine de liquidation, le prix du manteau sera approximativement de :
200 € × $0{,}9^8$ ≈ 86,09 €

3) On procède comme expliqué dans l'exercice précédent. On trouve :
La 6ème semaine, le manteau coûtera : 200 € × $0{,}9^6$ ≈ 106,29 € > 100 €
La 7ème semaine, le manteau coûtera : 200 € × $0{,}9^7$ ≈ 95,66 € < 100 €

Si cette personne souhaite acheter le manteau dès que son prix sera inférieur à 100 €, elle doit donc attendre la 7ème semaine de liquidation, en espérant que le manteau n'aura pas déjà été vendu.

4) L'achat ayant été réalisé lors de la deuxième semaine de liquidation, le prix de la robe avait déjà été baissé deux fois de 10 % par rapport à son prix de vente initial.

Si je note P_0 le prix initial de la robe, et P_n son prix lors de la nième semaine de liquidation (n étant un entier compris entre 1 et 8), cela donne :

$$\begin{tikzcd} P_0 \arrow[r, "{-10\ \%}"', "\times 0{,}9"] \arrow[rr, bend right, "\times 0{,}81"'] & P_1 \arrow[r, "{-10\ \%}"', "\times 0{,}9"] & P_2 = 137{,}70\text{ €} \end{tikzcd}$$

$P_2 = P_0 \times 0{,}9 \times 0{,}9 = P_0 \times 0{,}81$.

Donc $P_0 = \dfrac{P_2}{0{,}81} = \dfrac{137{,}70}{0{,}81} = 170$. Le prix initial de la robe était de 170 €.

5) Lors de la 8ème semaine de liquidation, le prix du pull-over a baissé 8 fois de 10 %. Il a donc été multiplié par $0{,}9^8$. Comme on connaît son prix au bout de la 8ème semaine, pour obtenir son prix initial, on divise le prix final par $0{,}9^8$:

$\frac{51{,}66}{0{,}9^8} \approx 120{,}01$. Le prix initial du pull-over était donc d'environ 120,01 €.

Exercice 15 : 1) Chaque jour, le nombre de cellules de type A augmente de 10 %, il est donc multiplié par 1,1. Quant au nombre de cellules de type B, il augmente de 5 % chaque jour, donc chaque jour, il est multiplié par 1,05.

Au bout de 10 jours, le nombre de cellules de type A sera donc :

$a_{10} = 1000 \times 1{,}1^{10} \approx 2594$ (Valeur arrondie à l'entier)

Et le nombre de cellules de type B sera donc de : $b_{10} = 1000 \times 1{,}05^{10} \approx 1627$

2) On peut par exemple demander à la calculatrice un tableau de valeurs de deux fonctions : celle qui à X associe $1000 \times 1{,}1^X$ et celle qui à X associe $1000 \times 1{,}05^X$ et observer à partir de quel rang les valeurs de la première colonne dépassent le double de celles de la première colonne.

Pour m'éviter des tâtonnements et des calculs de tête, j'ai utilisé un tableur : Dans la colonne A, j'ai fait afficher un nombre de jours variant de 0 à 20. (On tape 0 dans A2, puis 1 dans A3, on sélectionne A2 et A3 ensemble puis on tire vers le bas la petite poignée qui apparaît en bas à droite du rectangle de sélection.

	A	B	C	D
1	n	An	Bn	An/Bn
2	0	1000	1000	1
3	1	1100	1050	1,04761905
4	2	1210	1103	1,09750567
5	3	1331	1158	1,14976784
6	4	1464	1216	1,20451869
7	5	1611	1276	1,26187673
8	6	1772	1340	1,32196609
9	7	1949	1407	1,38491686
10	8	2144	1477	1,45086528
11	9	2358	1551	1,51995411
12	10	2594	1629	1,59233287
13	11	2853	1710	1,66815825
14	12	3138	1796	1,74759435
15	13	3452	1886	1,83081313
16	14	3797	1980	1,91799471
17	15	4177	2079	2,00932779
18	16	4595	2183	2,10501007
19	17	5054	2292	2,20524864
20	18	5560	2407	2,31026048
21	19	6116	2527	2,42027289
22	20	6727	2653	2,53552398

Dans B2 et dans C2 j'ai entré 1000.

Dans B3, j'ai entré la formule « =B2*1,1 » et je l'ai recopiée jusqu'en bas du tableau à l'aide de la poignée d'incrémentation.

Dans C3, j'ai entré la formule « =C2*1,05 » et je l'ai recopiée jusqu'en bas du tableau.

Dans D2 j'ai entré la formule « =B2/C2 » pour connaître le rapport $\frac{\textit{nombre de cellules}\ \mathrm{A}}{\textit{nombre de cellules}\ \mathrm{B}}$ et je l'ai recopiée vers le bas.

L'indice de la colonne D dépasse 2 à partir du rang $n = 15$.

C'est donc le 15ème jour que le nombre de cellules de type A dépassera le double du nombre de cellules de type B.

On aura alors : $a_{15} = 1000 \times 1,1^{15} \approx 4177$ cellules de type A, et $b_{15} = 1000 \times 1,05^{15} \approx 2079$ cellules de type B. On peut vérifier que $2079 \times 2 = 4158$, $4158 < 4177$. Le nombre de cellules de type A est bien supérieur au double du nombre de cellules de type B.

On peut vérifier que ce ne serait pas encore le cas au bout de 14 jours :
$a_{14} = 1000 \times 1,1^{14} \approx 3797$ $\qquad$ $b_{14} = 1000 \times 1,05^{14} \approx 1980$.
$1980 \times 2 = 3960$ et cette fois, $3960 > 3797$.

Exercice 16 : 1) Chaque année, la prime d'assurance de Pierre baisse de 5 %. Elle est donc chaque année multipliée par 0,95.
Au bout d'un an, elle sera donc de 450 € × 0,95 = 427,50 €
Au bout de deux ans, elle sera de 427,50 × 0,95 = 406,125 ≈ 406,13 €

2) Le bonus sera maximal dès lors que le calcul de la prime d'assurance donnera un résultat inférieur ou égal à la moitié de 450 €, à savoir 225 €.

Par tâtonnements ou avec un tableau de valeurs sur la calculatrice ou avec un tableur, on trouve : $450 \times 0,95^{13} \approx 231 > 225$ $\qquad$ et $450 \times 0,95^{14} \approx 219 < 225$.
C'est donc au bout de 14 années sans sinistre que Pierre aura atteint le bonus maximal.

3) C'est au bout de 14 ans sans sinistre aussi que Paul aura atteint son bonus maximal. Parce que celui-ci ne dépend pas du montant du bonus initial payé, mais du bonus annuel en pourcentage. Dès que la puissance à laquelle est élevé 0,95 donne un résultat inférieur à $\frac{1}{2}$, on a l'indice de la première année d'atteinte de la prime maximale.

Or $0,95^{13} \approx 0,51 > 0,5$, et $0,95^{14} \approx 0,49 < 0,5$.

4) Après 3 ans sans sinistre, la prime d'assurance de Paul a été multipliée par $0,95^3$. Pour trouver quelle était sa prime d'assurance initiale, il nous suffit de diviser 1076 € par $0,95^3$: $\frac{1076}{0,95^3} \approx 1256$. La prime d'assurance initiale de Paul était donc de 1256 €.

$$P_0 \xrightarrow{\times 0,95} P_1 \xrightarrow{\times 0,95} P_2 \xrightarrow{\times 0,95} P_3 = 1076 \text{ €}$$

Exercice 17 : 1) Décembre 2014, c'est 6 mois après juin 2014. Le nombre d'auditeurs a été multiplié par 1,06 chaque mois. En décembre 2014, il sera donc de : $11910 \times 1,06^6$ ≈ 16 895

2) Janvier 2014, c'est 5 mois avant juin 2014. $\frac{11910}{1,06^5} \approx 8900$. En janvier 2014, l'audience de « Radio qui monte » était donc d'environ 8900 auditeurs.