Terminale STAV – Problème (Exercice 3) du Bac STAV Polynésie juin 2011

Connaissance requises : dérivation, limites, logarithme népérien, résolution de systèmes linéaires 2x2.

Énoncé :

Partie A

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormal.
La tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(1;\frac{1}{2}\right)$ a pour coefficient directeur -3.

1) Donner $f(1)$ et $f'(1)$.

f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=ax^2+bx-4\ln x$, où a et b sont deux réels.

2) Calculer $f'(x)$ en fonction de a et de b.

3) Justifier que a et b sont solutions du système $\begin{cases} a+b=\frac{1}{2} \\ 2a+b=1 \end{cases}$ et déterminer a et b.

Partie B

On admet que f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4\ln x$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) Vérifier que $f(x)=x\left(\frac{1}{2}x-4\frac{\ln x}{x}\right)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

3) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

4) Étudier le signe de (x^2-4) sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ et donner les variations de la fonction f.

5) Compléter le tableau de valeurs suivant en arrondissant les résultats à 10^{-2} près.

x	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$											

6) Dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm, tracer la tangente à $\mathscr{C}_f$ eu point d'abscisse 2, la tangente (T) et la courbe $\mathscr{C}_f$.

Correction :

Partie A :

1) Comme $\mathscr{C}_f$ passe par le point A de coordonnées $\left(1;\frac{1}{2}\right)$, cela signifie que $\boxed{f(1)=\frac{1}{2}}$.

Comme la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point A a pour coefficient directeur -3, cela signifie que *f* est dérivable en $x=1$ et que $\boxed{f'(1)=-3}$.

2) *f* est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $\boxed{f(x)=ax^2+bx-4\ln x}$. f est donc dérivable sur $]0;+\infty[$ (en tant que somme et combinaisons linéaires de fonctions qui le sont).

Et pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x)=2ax+b-4\times\frac{1}{x}$, soit $\boxed{f'(x)=2ax+b-\frac{4}{x}}$.

Éventuellement : $\boxed{f'(x)=\frac{2ax^2+bx-4}{x}}$

À la question 1), nous avons montré que $\begin{cases} f(1)=\frac{1}{2} \\ f'(1)=-3 \end{cases}$, ce qui se traduit par : $\begin{cases} a\times 1^2+b\times 1-4\ln 1=\frac{1}{2} \\ 2a\times 1+b-\frac{4}{1}=-3 \end{cases}$

Soit $\begin{cases} a+b-4\times 0=\frac{1}{2} \\ 2a+b-4=-3 \end{cases}$, soit $\boxed{\begin{cases} a+b=\frac{1}{2} \\ 2a+b=1 \end{cases}}$ C.Q.F.D.

Pour résoudre le système, on a plusieurs possibilités. Celle qui est apprise en classe de 3ème est la méthode par substitutions (je ne pense pas que les élèves de STAV aient appris à résoudre les systèmes linéaires autrement que par substitutions, c'est pourquoi c'est cette résolution que je propose ici.).

La seconde équation du système, $\boxed{2a+b=1}$, est équivalente à $\boxed{b=1-2a}$.

On remplace b par $1-2a$ dans la première équation. On obtient :
$a+1-2a=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-a=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}=a \Leftrightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$.

On remplace maintenant a par $\frac{1}{2}$ dans $\boxed{b=1-2a}$: $b=1-2\times\frac{1}{2}=1-1$, $\boxed{b=0}$.

On remarque que c'est cohérent avec l'expression de $f(x)$ qu'on nous donne à la question 2 :
$f(x)=\frac{1}{2}x^2-4\ln x$.

Partie B :

1) *f* est définie sur $]0;+\infty[$ par $\boxed{f(x)=\frac{1}{2}x^2-4\ln x}$.

$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}\times 0^2=0}$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty$ donc $\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}-4\ln x=+\infty}$, donc d'après le tableau sur la limite d'une somme dont un terme tends vers 0 et l'autre vers $+\infty$, $\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty}$.

L'axe des ordonnées (=la droite d'équation $x=0$) est donc asymptote verticale à la courbe représentative de f.

2) Comme $x\neq 0$, on peut factoriser par x l'expression de $f(x)$ (dans le cas contraire, on n'aurait pas pu faire figurer x au dénominateur) :

Pour tout $x\in\ ]0;+\infty[$, $f(x)=\frac{1}{2}x\times x-\frac{4\ln x\times x}{x}$ donc $\boxed{f(x)=x\left(\frac{1}{2}x+4\frac{\ln x}{x}\right)}$.

On sait d'après le cours que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, donc que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} 4\frac{\ln x}{x}=0}$

Et que $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ donc que $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x=+\infty}$

donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x+4\frac{\ln x}{x}=+\infty}$

Et comme $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x=+\infty}$, d'après les règles sur la limite d'un produit, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

3) Pour tout x de $]0;+\infty[$, $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4\ln x$.

Pour tout x de $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{1}{2}\times 2x-4\times\frac{1}{x}$, soit $\boxed{f'(x)=x-\frac{4}{x}}$.

Pour étudier le signe de $f'(x)$, on transforme son expression : $f'(x)=\frac{x^2}{x}-\frac{4}{x}$ soit $\boxed{f'(x)=\frac{x^2-4}{x}}$.

4) Étude du signe de x^2-4 sur $\mathbb{R}$: d'après la troisième identité remarquable, pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$ avec $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ et $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Étude de signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$:

x	0		2		$+\infty$
x^2-4		$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
variations de f	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$2-4\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(2)=\frac{1}{2}\times 2^2-4\ln 2=2-4\ln 2$$

5) x	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$	5,58	2,9	0,5	$-0{,}50$	$-0{,}77$	-0,54	0,11	1,12	2,45	4,11	6,06

6) Voir le graphique sur l'annexe.