Terminale STAV – Problème sur les fonctions avec le logarithme népérien
Exercice 2 du Bac STAV Nouvelle Calédonie de novembre 2011

Remarque : on peut traiter ce problème sans avoir vu les primitives, mais on doit avoir étudié le chapitre sur les limites.

Énoncé :

1) Soit g la fonction définie sur $]-1;5]$ par $g(x)=3\ln(x+1)-\ln(x+2)$.
On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Déterminer la limite de g en -1. Interpréter graphiquement ce résultat.
b) Démontrer que $g'(x)=\dfrac{2x+5}{(x+1)(x+2)}$ pour tout x de l'intervalle $]-1;5]$.
c) Prouver que $g'(x)$ est positif pour tout x de l'intervalle $]-1;5]$.
d) Dresser le tableau de variations de g sur $]-1;5]$. On donnera la valeur exacte de $g(5)$.

2) Déterminer une équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

3) Compléter le tableau de valeurs suivant (les résultats seront arrondis à 10^{-2} près) :

x	$-0{,}75$	$-0{,}5$	0	1	2	3	4	5
$g(x)$								

4) Construire la tangente (T) et la courbe $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthonormal. On prendra pour unité graphique 2 cm sur chacun des axes.

Correction commentée :

g est définie sur $]-1;5]$ par $g(x)=3\ln(x+1)-\ln(x+2)$

1)a) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} x+1=0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \ln(x+1)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\X>0}} \ln(X)=-\infty$,donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} 3\ln(x+1)=-\infty}$

.

$\lim\limits_{x\to-1} x+2=-1+2=1$ donc $\lim\limits_{x\to-1} \ln(x+2)=\ln(1)=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-1} -\ln(x+2)=0}$.

donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x)=-\infty}$

$\mathscr{C}_g$ admet donc une asymptote verticale d'équation $\boxed{x=-1}$.

b) $x+1$ et $x+2$ étant strictement positifs pour tout x de $]-1;5]$, g est dérivable sur $]-1;5]$.

On rappelle que si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, la fonction $\ln(u)$ est elle aussi dérivable sur I et sa dérivée est $\dfrac{u'}{u}$.

$g(x)$ est de la forme $3\ln(u(x))-\ln(v(x))$ avec $u(x)=x+1$, $v(x)=x+2$ et $u'(x)=v'(x)=1$.

Donc $g'(x)=3\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}-\dfrac{v'(x)}{v(x)}=3\times\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{3(x+2)-1(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{3x+6-x-1}{(x+1)(x+2)}$

Donc $\boxed{g'(x)=\dfrac{2x+5}{(x+1)(x+2)}}$ C.Q.F.D

c) x ∈ $]-1;5]$ ⇔ $-1<x\leqslant 5$.

Utilisons cet encadrement pour déterminer le signe des 3 expressions $2x+5$, $x+1$ et $x+2$:

$-1<x\leqslant 5$ ⇔ $-2<2x\leqslant 10$ ⇔ $3<2x+5\leqslant 15$
(en multipliant les 3 membres par 2) (en additionnant 5 aux trois membres)

On rappelle 3 des règles fondamentales concernant la manipulation des inégalités :

- On a le droit d'additionner ou de soustraire un même nombre quelconque à chaque membre sans changer le sens des inégalités.
- On a le droit de multiplier ou de diviser chaque membre par un même nombre strictement positif sans changer le sens des inégalités.
- On a le droit de multiplier ou de diviser chaque membre par un même nombre strictement négatif, en changeant cette fois le sens des inégalités.

Comme pour tout x de $]-1;5]$, $2x+5>3$, alors $\boxed{2x+5>0}$.

$-1<x\leqslant 5$ ⇔ $0<x+1\leqslant 6$ (en additionnant 1 aux trois membres)

Donc pour tout x ∈ $]-1;5]$, $\boxed{x+1>0}$.

$-1<x\leqslant 5$ ⇔ $1<x+2\leqslant 7$ (en additionnant 2 aux trois membres)

Donc pour tout x ∈ $]-1;5]$, $x+2>1$ donc $\boxed{x+2>0}$.

Par conséquent, $g'(x)=\dfrac{\overset{+}{2x+5}}{\underset{+}{(x+1)}\underset{+}{(x+2)}}$, d'après la règle des signes, est strictement positif sur $]-1;5]$.

Rappel : la règle des signes ne s'applique que pour des produits ou des quotients. C'est bien le cas ici, car $g'(x)$ est sous forme factorisée.

d)

x	-1		5
signe de $g'(x)$	‖	+	
variations de g	$-\infty$	↗	$3\ln 6-\ln 7$

Calcul : $g(5)=3\ln(5+1)-\ln(5+2)=3\ln(6)-\ln(7)$

2) Méthode 1 : si on connaît par cœur la formule de l'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable en un point d'abscisse donnée, une équation de (T) est : $y=g'(0)(x-0)+g(0)$.

Rappel de cours de 1ère : si *f* est une fonction dérivable en a , la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse a a pour équation : $\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$.

On calcule $g'(0)=\dfrac{2\times0+5}{(0+1)(0+2)}=\dfrac{5}{2}$ et $g(0)=3\ln(0+1)-\ln(0+2)=3\times\ln(1)-\ln(2)=3\times0-\ln 2=-\ln 2$.

Donc une équation de (T) est $\boxed{y=\dfrac{5}{2}x-\ln 2}$.

(en remplaçant $g(0)$ et $g'(0)$ par leurs valeurs dans l'équation $y=g'(0)(x-0)+g(0)$)

Méthode 2 : si on ne connaît pas par cœur la formule de l'équation de la tangente :

- On sait que (T), tangente à $\mathcal{C}_g$ en son point d'abscisse 0, a pour coefficient directeur $g'(0)$.

On calcule $g'(0)=\dfrac{2\times0+5}{(0+1)(0+2)}=\dfrac{5}{2}$. Le coefficient directeur de (T) est donc $\boxed{\dfrac{5}{2}}$.

Rappel de 1ère : Si une fonction f est dérivable en a , la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse a a pour coefficient directeur $f'(a)$, le nombre dérivé de f en a .

- (T) admettra donc une équation réduite de la forme $y=\dfrac{5}{2}x+p$.

Pour déterminer p , l'ordonnée à l'origine de (T), il nous suffit de connaître les coordonnées d'un point de (T).

Or (T) passe par le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse 0, que nous appellerons A, et qui a donc pour coordonnées $(0;g(0))$.

On calcule : $g(0)=3\ln(0+1)-\ln(0+2)=3\times\ln(1)-\ln(2)=3\times0-\ln 2=-\ln 2$.

(T) passe donc par le point A de coordonnées $(0;-\ln 2)$.

- On remplace x et y par les coordonnées de A, soit 0 et $-\ln 2$, dans l'équation $y=\dfrac{5}{2}x+p$ afin de trouver p .

On obtient : $-\ln 2=\dfrac{5}{2}\times0+p \Leftrightarrow -\ln 2=p$ ou $p=-\ln 2$.

L'ordonnée à l'origine de (T) est donc $\boxed{-\ln 2}$.

Donc (T) a pour équation réduite : $\boxed{y=\dfrac{5}{2}x-\ln 2}$.

3)

x	$-0,75$	$-0,5$	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	$-4,38$	$-2,46$	$-0,69$	0,98	1,91	2,55	3,04	3,43

(point A)

Pour l'obtenir, j'ai demandé à la calculatrice un tableau de valeurs allant de -0,75 à 0 avec un pas de 0,25, puis un tableau allant de 0 à 5 avec un pas de 1.

Pour tracer (T), il nous faut connaître au moins un autre de ses points que A.

Soit B le point de (T) d'abscisse 2. Calculons l'ordonnée de (T).

(T) a pour équation $y=\dfrac{5}{2}x-\ln 2$, donc l'ordonnée de B est $\dfrac{5}{2}\times2-\ln 2=5-\ln 2 \approx 4,31$

Voir le graphique fourni en fichier jpg annexe.