Terminale STAV – Problème du baccalauréat 2009

Partie A :

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=1-\ln x+2x^2$.

1) Montrer que : $g'(x)=\dfrac{(2x+1)(2x-1)}{x}$.

2) a) Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0;+\infty[$.
   b) Calculer $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
   c) Dresser le tableau de variations de g sur $]0;+\infty[$ (sans les limites)

3) En déduire que, pour tout x de $]0;+\infty[$, $g(x)$ est strictement positif.

Partie B :

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}+2x-3$.

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe dans le repère orthogonal (O,I,J) (unités : 2 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées).

1) Étudier la limite de f en 0. En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

2) Étudier la limite de f en $+\infty$ et démontrer que la droite Δ d'équation $y=2x-3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3) Montrer que pour tout x strictement positif, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

4) Dresser le tableau de variations de f.

5) Soient A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives e et $\sqrt{e}$.
   a) Donner les valeurs arrondies au centième des coordonnées de A et de B.
   b) En déduire que f est positive sur $[e;\sqrt{e}]$

6) Tracer la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}$ et placer A et B.

7) a) Démontrer qu'au point A, la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à Δ.
   b) Le point A est-il le seul point de $\mathscr{C}$ admettant une tangente parallèle à Δ.

Correction.

Partie A

g est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=1-\ln x+2x^2$.

1) g est la somme de 3 fonctions définies et dérivables sur $]0;+\infty[$. Elle est donc dérivable sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x \in\ ]0;+\infty[$, on a :

$g'(x)=0-\frac{1}{x}+4x=-\frac{1}{x}+\frac{4x^2}{x}=\frac{-1+4x^2}{x}=\frac{4x^2-1}{x}=\frac{(2x)^2-1^2}{x}$ soit $\boxed{g'(x)=\frac{(2x+1)(2x-1)}{x}}$ C.Q.F.D.

Rappel : la troisième identité remarquable dans le sens factorisation : $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ *, c'est pourquoi* $(2x)^2-1^2=(2x+1)(2x-1)$.

2) **a)** Signe de 2x+1 : $2x+1=0 \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

$2>0$ donc $2x+1<0$ pour $x<-\frac{1}{2}$ et $2x+1>0$ pour $x>-\frac{1}{2}$

Comme x ∈ $]0;+\infty[$, $2x+1>0$ pour tout x dans le tableau de signes.

Signe de 2x-1 : $2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

$2>0$ donc $2x-1<0$ pour $x<\frac{1}{2}$ et $2x-1>0$ pour $x>\frac{1}{2}$.

Signe de x : $x=0$ pour $x=0$. Et pour $x \in \ ]0;+\infty[$, $x>0$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$+$		$+$	
$2x-1$		$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$	
$g'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

b) $g\left(\frac{1}{2}\right)=1-\ln\left(\frac{1}{2}\right)+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=1+\ln(2)+2\times\frac{1}{4}=1+\ln(2)+\frac{1}{2}$ $\boxed{g\left(\frac{1}{2}\right)=\ln(2)+\frac{3}{2}}$.

c)

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
g	$\|$	$\searrow$	$\ln(2)+\frac{3}{2}$	$\nearrow$	

3) D'après le tableau de variations de g, $\ln(2)+\frac{3}{2}$ est un minimum absolu pour g sur $]0;+\infty[$.

Or $\frac{3}{2}>0$ et $\ln(2)>0$ puisque $2>1$ *(On rappelle que* $\ln(x)<0$ *pour* $x\in\ ]0;1[$, $\ln(x)=0$ *lorsque* $x=1$ *et* $\ln(x)>0$ *lorsque* $x>1$ *.)* $\ln(2)+\frac{3}{2}$ est la somme de deux nombres strictement positifs.

Donc $\ln(2)+\frac{3}{2}>0$. Comme $\ln(2)+\frac{3}{2}$ est un minimum absolu pour g sur $]0;+\infty[$, pour tout x ∈ $\boxed{]0;+\infty[}$,

$g(x)\geqslant\ln(2)+\frac{3}{2}>0$ donc $\boxed{g(x)>0}$.

Partie B

$$f \text{ est définie sur }]0;+\infty[\text{ par } f(x)=\frac{\ln(x)}{x}+\underbrace{2x-3}.$$

$-\infty$ $\qquad$ -3 (lorsque $x\to 0^+$)

1) On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x=0^+$.

D'après les théorèmes opératoires sur les limites et la règle des signes, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x)}{x}=-\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} 2x-3=2\times 0-3=-3$, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty}$.

$\mathscr{C}$ admet donc pour asymptote l'axe des ordonnées, c'est-à-dire la droite d'équation $\boxed{x=0}$.

2) D'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-3=+\infty$ (fonction affine).

Donc (d'après le cours sur la somme de limites) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

De plus, pour tout x ∈ $]0;+\infty[$, $f(x)-(2x-3)=\dfrac{\ln(x)}{x}$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-3)=0$.

La droite d'équation $\boxed{y=2x-3}$ est donc asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.

(Les connaissances à avoir pour traiter cette question sont : si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ou $-\infty$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$, alors la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$. Ce résultat est aussi valable pour une limite en $-\infty$.)

3) et **4)** Pour tout x ∈ $]0;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}+2x-3$, avec $u(x)=\ln(x)$ et $v(x)=x$.

v ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$, et on a, pour tout x de $]0;+\infty[$, $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v'(x)=1$.

Donc, pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2}+2$,

soit $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln(x)}{x^2}+2=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}+\dfrac{2x^2}{x^2}$

soit $\boxed{f'(x)=\dfrac{1-\ln(x)+2x^2}{x^2}}$ donc $\boxed{f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}}$.

x	0		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	
x^2	0		
$f'(x)$	‖	$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

5) **a)** $\boxed{e\approx 2{,}72}$ $\qquad$ $\boxed{\sqrt{e}\approx 1{,}65}$.

$$f(\mathrm{e})=\frac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}}+2\mathrm{e}-3=\frac{1}{\mathrm{e}}+2\mathrm{e}-3 \quad \boxed{f(\mathrm{e})\approx 2{,}80}$$

$$f(\sqrt{\mathrm{e}})=\frac{\ln(\sqrt{\mathrm{e}})}{\sqrt{\mathrm{e}}}+2\sqrt{\mathrm{e}}-3=\frac{\ln \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\mathrm{e}}}+2\sqrt{\mathrm{e}}-3=\frac{\ln(\mathrm{e})}{2\sqrt{\mathrm{e}}}+2\sqrt{\mathrm{e}}-3=\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}+2\sqrt{\mathrm{e}}-3 \quad \boxed{f(\sqrt{\mathrm{e}})\approx 0{,}60}.$$

Au centième près, les coordonnées de A et de B sont respectivement $\boxed{(2{,}72\,;2{,}80)}$ et $\boxed{(1{,}65;0{,}60)}$.

b) f étant strictement croissante sur $]0;+\infty[$, elle l'est nécessairement sur $[\sqrt{\mathrm{e}};\mathrm{e}] \subset]0;+\infty[$.
Sur $[\sqrt{\mathrm{e}};\mathrm{e}]$, $f(\sqrt{\mathrm{e}})$ est donc le minimum de f . Son arrondi au centième est 0,60, donc $f(\sqrt{\mathrm{e}})>0$.
Comme le minimum de f sur $[\sqrt{\mathrm{e}};\mathrm{e}]$ est strictement positif, $\boxed{f}$ est strictement positive sur $\boxed{[\sqrt{\mathrm{e}};\mathrm{e}]}$.

6) Pour tracer la droite Δ, il suffit d'en connaître deux points.
Pour $x=0$, $2x-3=2\times 0-3=-3$ donc le point de coordonnées $(0;-3) \in \Delta$.
Pour $x=5$, $2x-3=2\times 5-3=7$ donc le point de coordonnées $(5;7) \in \Delta$.
Pour plus de précision de tracé : pour $x=8$, $5x-3=2\times 8-3=13$, donc le point de coordonnées $(8;13)$ appartient à Δ.

Pour tracer $\mathscr{C}$, établissons un tableau de valeurs (arrondies au centième) à la calculatrice :

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,25	1,5	2	3	4	5	7	9
$f(x)$	-10,64	-4,49	-2,65	-1,68	-1	-0,32	0,27	1,35	3,37	5,35	7,32	11,28	15,24

(Voir graphique sur papier millimétré en annexe)

7) a) Le coefficient de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A est $f'(\mathrm{e})$,
c'est-à-dire $\frac{1-\ln(\mathrm{e})+2\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2}=\frac{1-1+2\mathrm{e}^2}{e^2}=\frac{2\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2}=2$.
Cette tangente a un coefficient directeur de 2, comme Δ, donc elle est parallèle à Δ.

b) Pour savoir s'il existe un autre point de $\mathscr{C}$ auquel la tangente à $\mathscr{C}$ soit parallèle à Δ, on résout dans $]0;+\infty[$ l'équation $\boxed{f'(x)=2}$. Nommons-la (E).

(E) ⇔ $\frac{1-\ln(x)+2x^2}{x^2}=2 \Leftrightarrow 1-\ln(x)+2x^2=2x^2$ car $x^2>0$ donc $x^2\neq 0$ sur $]0;+\infty[$, c'est pourquoi on a le droit de multiplier les deux membres de l'équation par x^2 .
(E) ⇔ $1-\ln(x)=0$ en soustrayant $2x^2$ aux deux membres.
(E) ⇔ $\ln(x)=1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln(x)}=\mathrm{e}^1 \Leftrightarrow x=\mathrm{e}$. $\quad S=\{\mathrm{e}\}$

A est donc le seul point de $\mathscr{C}$ en lequel $\mathscr{C}$ admette une tangente parallèle à Δ.