Terminale STAV – Exercice 2 du bac métropole, Antilles-Guyane et la Réunion de juin 2011

Énoncé :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$, par $f(x)=\ln(x-1)-\dfrac{1}{x-1}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer la limite de f quand x tend vers 1. Interpréter graphiquement cette limite.

2) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

3) a) Démontrer que $f'(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ pour tout x de l'intervalle $]1;+\infty[$.

b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]1;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 2.

5) a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous en arrondissant les résultats à 10^{-2} près.

x	1,2	1,5	2	3	4	5	6
$f(x)$							

b) Construire la tangente (T) et la courbe $\mathscr{C}_f$, dans un repère orthonormal. On prendra pour unité graphique 2cm sur chacun des axes.

6) On considère la fonction F définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $F(x)=(x-2)\ln(x-1)-x$.

a) Démontrer que F est une primitive de f sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

b) Calculer la valeur exacte de $f(3)$, puis démontrer que pour tout x de l'intervalle [3;5], on a $f(x)\geqslant 0$.

c) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Corrigé :

1) f est la fonction définie sur $]1;+\infty[$, par $\boxed{f(x)=\ln(x-1)-\dfrac{1}{x-1}}$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\ln(x-1)=\lim\limits_{\substack{X\to0\\X>0}}\ln X=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{\substack{X\to0\\X>0}}\dfrac{1}{X}=+\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}-\dfrac{1}{x-1}=-\infty$

D'après les résultats de cours sur la limite d'une somme, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=-\infty}$. La droite d'équation $x=1$ est donc asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-1)=\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x-1=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}=0^+$

D'après les résultats de cours sur la limite d'une somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

3) a) Pour tout x de $]1;+\infty[$, $f(x)$ est de la forme $\ln(u(x))-\dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x)=x-1$ et $u'(x)=1$.

<u>Remarque</u> : sur l'intervalle $]1;+\infty[$, $x-1$ est strictement positif, donc f est bien définie.

Donc, pour tout x de $]1;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}-\dfrac{-u'(x)}{(u(x))^2}$, soit $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{-1}{(x-1)^2}$,

Soit $f'(x)=\dfrac{x-1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$, soit $f'(x)=\dfrac{x-1+1}{(x-1)^2}$, soit $\boxed{f'(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}}$.

b) Pour tout $x \in]1;+\infty[$, $x>1$ donc $x-1>0$, donc $(x-1)^2>0$. (dénominateur de $f'(x)$)
$x>1$, donc $x>0$. (numérateur de $f'(x)$)

Donc, d'après la règle des signes (quotient de deux nombres positifs) , pour tout $x \in]1;+\infty[$, $\boxed{f'(x)>0}$.

c) Comme pour tout x de $]1;+\infty[$, $f'(x)>0$, f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

x	1		$+\infty$
variations de f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) Pour déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 2, commençons par calculer $f(2)$ et $f'(2)$.

$f(2)=\ln(2-1)-\dfrac{1}{2-1}=\ln(1)-\dfrac{1}{1}=0-1=-1$. Donc l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2 est -1 .

Le point de coordonnées $(2;-1)$, que nous nommerons A, est donc commun à $\mathcal{C}_f$ et à (T).

$f'(2)=\dfrac{2}{(2-1)^2}=\dfrac{2}{1^2}=2$. Il s'agit du coefficient directeur de (T).

(T) a donc une équation réduite de la forme $y=2x+p$.

Comme A $\in$ (T), on a $y_A=2x_A+p$, soit $-1=2\times2+p \Leftrightarrow -1=4+p \Leftrightarrow -5=p$.

L'équation réduite de (T) est donc $\boxed{y=2x-5}$.

5) a)

x	1,2	1,5	2	3	4	5	6
$f(x)$	–6,61	–2,69	–1	0,19	0,77	1,14	1,41

b) *Voir le graphique en annexe. Attention à bien choisir le placement des axes sur le papier millimétré en fonction de l'échelle et du tableau de valeurs.*

Pour tracer (T) avec précision, choisissons deux autres points en plus de A, assez éloignés :
Si $x=0$, $2\times0-5=-5$, donc (T) passe par le point de coordonnées $(0;-5)$
Si $x=3$, $2\times3-5=1$, donc (T) passe par le point de coordonnées $(3;1)$.

6) F est la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $\boxed{\mathrm{F}(x)=(x-2)\ln(x-1)-x}$.

a) D'après les théorèmes de dérivation d'une somme et d'un produit, et comme $x-1>0$ pour tout x de $]1;+\infty[$, F est dérivable sur $]1;+\infty[$.

Pour tout x de $]1;+\infty[$, $\mathrm{F}(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)-x$ avec :

$\boxed{u(x)=x-2}$, $\boxed{u'(x)=1}$, $\boxed{v(x)=\ln(x-1)}$, et $\boxed{v'(x)=\frac{1}{x-1}}$ (vu dans la question 3 a)).

Donc pour tout x de $]1;+\infty[$, $\quad F'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)-1$,

soit $F'(x)=1\times\ln(x-1)+\frac{1}{x-1}\times(x-2)-1$

soit $F'(x)=\ln(x-1)+\frac{x-2}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}$

soit $F'(x)=\ln(x-1)+\frac{x-2-(x-1)}{x-1}$

soit $F'(x)=\ln(x-1)+\frac{x-2-x+1}{x-1}$

soit $F'(x)=\ln(x-1)+\frac{-1}{x-1}$

soit $\boxed{F'(x)=\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}=f(x)}$.

F est bien une primitive de f sur $]1;+\infty[$.

b) $f(3)=\ln(3-1)-\frac{1}{3-1}$, $f(3)=\ln 2-\frac{1}{2}$.

Soit on admet grâce à la calculatrice que $\ln 2>\frac{1}{2}$ donc $f(3)>1$.

J'ai une idée pour le prouver, mais il faut connaître les exponentielles :

On sait que le nombre e (e≈2,718) est compris entre 2 et 3 donc inférieur strictement à 4 : $e<4$.

Comme e et 4 appartiennent à l'intervalle $[0;+\infty[$ sur lequel la fonction racine carrée est strictement croissante, on peut composer cette inégalité par la fonction racine carrée en conservant l'ordre :

On obtient : $\sqrt{e}<\sqrt{4}$, soit $e^{\frac{1}{2}}<2$.

Comme la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et comme $e^{\frac{1}{2}}$ et 2 appartiennent à cet intervalle, on compose les deux membres de cette inégalité par la fonction ln et on trouve :

$\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)<\ln 2$, soit $\frac{1}{2}<\ln 2$, donc $\ln 2-\frac{1}{2}>0$. Bilan : $\boxed{f(3)>0}$.

Comme f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$, pour tout $x\geqslant 3$, $f(x)\geqslant f(3)>0$.
C'est pourquoi pour tout x de l'intervalle $[3;5]$, $f(x)>0$.

c) Comme F est une primitive de f sur $]1;+\infty[$ et comme 3 et 5 appartiennent à $]1;+\infty[$,

$$\int_3^5 f(x)\,dx=F(5)-F(3)=(5-2)\ln(5-1)-5-((3-2)\ln(3-1)-3)=3\ln 4-5-(\ln 2-3)=3\ln 4-5-\ln 2+3$$

$$\int_3^5 f(x)\,dx=3\ln 4-\ln 2-2\ \approx 1{,}466.$$

Il s'agit de l'aire, en unités d'aire, de la zone hachurée sur le graphique, celle qui est limitée par $\mathcal{C}_f$, par l'axe des abscisses, et par les droites d'équations $x=3$ et $x=5$. Ceci parce qu'on a prouvé que pour tout $x\in[3;5]$, $f(x)>0$, donc que la courbe $\mathcal{C}_f$ se situe bien au-dessus de l'axe des abscisses pour $x\in[3;5]$.

Pour connaître cette aire en cm^2 , il faudrait la multiplier par 4 car 1 unité d'aire = $4\,cm^2$ à cause de l'échelle.