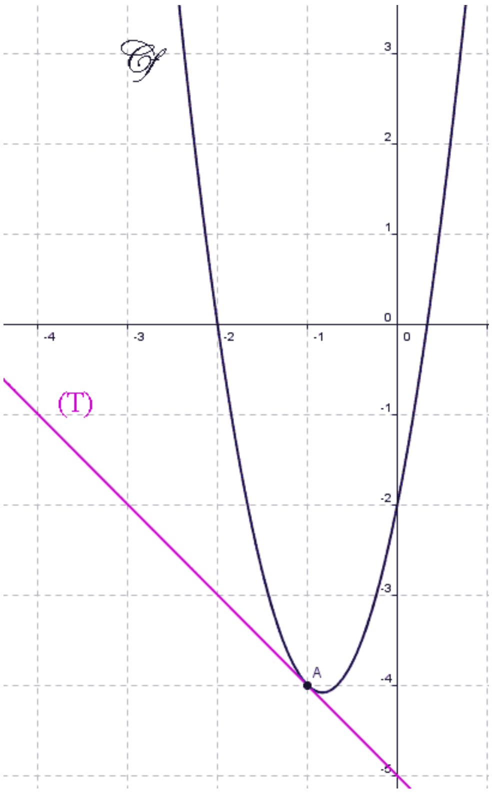
Terminale STAV – Exercices pour réviser la dérivation.

Énoncés :



Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=-3x^2+7x-10$.

1) Calculer le taux de variation de f en $x_0=-3$
2) En déduire $f'(-3)$
3) Donner une équation de la tangente à la courbe de f en $x_0=-3$

Exercice 2 : Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée en appliquant la règle adaptée :

1) $f(x)=5x^3+3x^2-2x+1$
2) $g(x)=(2x^2+5x-3)(5-2x)$
3) $h(x)=\dfrac{x^2+2}{3x^2-1}$

Exercice 3 : On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=3x^2+5x-2$.

1) Calculer $f'(x)$.
2) Écrire une équation de la tangente (T) à la courbe représentative de f en son point d'abscisse $x_0=-1$.
3) Vérifier le résultat trouvé par le calcul pour l'équation de (T) par la lecture sur le graphique du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine de (T)

Corrigés :

Exercice 1 : f est la fonction définie sur ℝ par $f(x)=-3x^2+7x-10$.

1) Je ne connais pas le terme de taux de variation en un réel (je connais le taux d'accroissement entre deux valeurs), mais je suppose que le professeur s'attend à ce que l'élève revienne à la définition de la limite, donc donne l'expression dont la limite est $f'(-3)$.

Il y a deux expressions possibles selon le cours donné à l'élève :

- Soit $\boxed{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$ dont la limite quand x tend vers x_0 est $f'(x_0)$.

Dans notre contexte, cela donne : $t(x)=\dfrac{-3x^2+7x-10-(-3x_0^2+7x_0-10)}{x-x_0}=\dfrac{-3x^2+7x-10+3x_0^2-7x_0+10}{x-x_0}$

$t(x)=\dfrac{-3(x^2-x_0^2)+7(x-x_0)}{x-x_0}$ $\quad t(x)=\dfrac{-3(x-x_0)(x+x_0)+7(x-x_0)}{x-x_0}$ $\quad t(x)=\dfrac{(x-x_0)[-3(x+x_0)+7]}{x-x_0}$

$t(x)=-3(x+x_0)+7$ $\quad t(x)=-3x-3x_0+7$

Et comme, ici, $x_0=-3$, on a $\quad t(x)=-3x-3\times(-3)+7$ $\quad \boxed{t(x)=-3x+16}$

- Soit $\boxed{t(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$ dont la limite lorsque h tend vers 0 est $f'(x_0)$.

$t(h)=\dfrac{-3(x_0+h)^2+7(x_0+h)-10-(-3x_0^2+7x_0-10)}{h}$

$t(h)=\dfrac{-3(x_0^2+2x_0h+h^2)+7x_0+7h-10+3x_0^2-7x_0+10}{h}$

$t(h)=\dfrac{-3x_0^2-6x_0h-3h^2+7h+3x_0^2}{h}$ $\quad t(h)=\dfrac{-3h^2-6x_0h+7h}{h}$ $\quad t(h)=\dfrac{h(-3h-6x_0+7)}{h}$

$t(h)=-3h-6\times(-3)+7$ $\quad \boxed{t(h)=-3h+25}$

2) $f'(-3)=\lim\limits_{x\to x_0} -3x+16=-3\times(-3)+16=25$ avec la première expression.

ou $f'(-3)=\lim\limits_{h\to 0} -3h+25=-3\times 0+25=25$ avec la seconde expression.

Dans les deux cas, on trouve $\boxed{f'(-3)=25}$.

Et en pratique, dès qu'on connaît les dérivées des fonctions usuelles et les théorèmes opératoires sur les dérivées, on calcule : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=-3\times 2x+7\times 1+0$ soit $f'(x)=-6x+7$.

Et on a bien $f'(-3)=-6\times(-3)+7=18+7=25$.

3) Lorsque *f* est dérivable en *a*, une équation de la tangente à sa courbe représentative en son point d'abscisse a est : $\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$. (cf. cours)

On applique ici la formule pour $a=-3$: Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse -3 est : $y=25(x-(-3))+f(-3)$.

Calculons $f(-3)=-3\times(-3)^2+7\times(-3)-10$ $\quad f(-3)=-27-21-10$ $\quad \boxed{f(-3)=-58}$

Une équation de la tangente recherchée est donc :
$y=25(x+3)-58$, soit $y=25x+75-58$, soit $\boxed{y=25x+17}$.

Exercice 2 : 1) *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x^3+3x^2-2x+1$
f est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$f'(x)=5\times 3x^2+3\times 2x-2\times 1+0$ $\quad$ Soit $\boxed{f(x)=15x^2+6x-2}$.

Les formules utilisées pour ce calculs sont : $\boxed{(u+v)'(x)=u'(x)+v'(x)}$ et $\boxed{(k\times u)'(x)=k\times u'(x)}$, où *u* et *v* sont deux fonctions dérivables et k une constante.

2) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{g(x)=(2x^2+5x-3)(5-2x)}$.

Méthode 1 : la plus simple : développer et réduire $g(x)$ puis calculer la dérivée du polynôme obtenu :
$g(x)=(2x^2+5x-3)(5-2x)$
$g(x)=-4x^3-10x^2+10x^2+25x+6x-15$
(Je développe en rangeant les termes selon les puissances décroissantes de x)
$g(x)=-4x^3+31x-15$.

Donc $g'(x)=-4\times 3x^2+31\times 1-15\times 0$ $\quad \boxed{g'(x)=-12x^2+31}$

Méthode 2 : qui n'est intéressante que parce qu'elle nous entraîne à appliquer la formule de la dérivée d'un produit de deux fonctions, qui est : $(u\times v)'(x)=u'(x)\times v(x)+v'(x)\times u(x)$

On pose $g(x)=u(x)\times v(x)$ avec $\begin{cases} u(x)=2x^2+5x-3 \text{ donc } u'(x)=4x+5 \\ v(x)=5-2x \text{ donc } v'(x)=-2 \end{cases}$

On a alors $g'(x)=u'(x)\times v(x)+v'(x)\times u(x)$ $\quad g'(x)=(4x+5)\times(5-2x)+(-2)\times(2x^2+5x-3)$

$g'(x)=20x+25-8x^2-10x-4x^2-10x+6$ $\quad \boxed{g'(x)=-12x^2+31}$

3) $h(x)=\dfrac{x^2+2}{3x^2-1}$

Remarque : h est définie sur $\mathbb{R}-\{-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\}$

car $3x^2-1=0 \Leftrightarrow 3x^2=1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{1}{3}}$ ou $x=\sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

h est dérivable sur chacun des intervalles de $\mathbb{R}-\{-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\}$, donc sur $\left]-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$, sur $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right[$,

Pour calculer $h'(x)$, on utilise la formule de la dérivée d'un quotient : $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x)=\dfrac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{[v(x)]^2}}$

Ici, on pose $h(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x)=x^2+2 \text{ donc } u'(x)=2x \\ v(x)=3x^2-1 \text{ donc } v'(x)=6x \end{cases}$

$h'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}$ $\quad h'(x)=\dfrac{2x\times(3x^2-1)-6x\times(x^2+2)}{(3x^2-1)^2}$ $\quad h'(x)=\dfrac{6x^3-2x-6x^3-12x}{(3x^2-1)^2}$

$$\boxed{h'(x)=\frac{-14x}{(3x^2-1)^2}}$$

Exercice 3 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+5x-2$.

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=3\times2x+5\times1-2\times0$ $\quad f'(x)=6x+5$

2) Lorsque f est dérivable en a, une équation de la tangente à sa courbe représentative en son point d'abscisse a est : $\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$.

Ici, on applique la formule pour $a=-1$ afin d'établir une équation de (T).

Préalablement, on calcule : $f(-1)=3\times(-1)^2+5\times(-1)-2$ $\quad f(-1)=3-5-2$ $\quad \boxed{f(-1)=-4}$.

et $\quad f'(-1)=6\times(-1)+5$ $\quad \boxed{f'(-1)=-1}$

Une équation de (T) est donc : $y=-1(x+1)-4$ soit $y=-x-1-4$ soit $\boxed{y=-x-5}$.

3) Le coefficient directeur de (T) est donc -1 et son ordonnée à l'origine -5.

C'est cohérent avec le graphique :

- La droite (T) coupe l'axe des ordonnées en son point d'ordonnée -5.
- La pente de la droite est de -1 car, par exemple, entre A et le point de coordonnées (0;5) (appelons-le B),

on a : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-5-(-4)}{0-(-1)}=\dfrac{-1}{1}=-1$. On peut aussi penser : « Quand on avance de 1 vers la droite, on descend de 1 » : le coefficient directeur, c'est « de combien on monte ou descend quand on avance de 1 vers la droite entre deux points de la droite ».

Alternative pour les calculs d'équations de tangentes :

J'ai vu dans le manuel de 1ère STAV qu'on faisait calculer une équation de la tangente sans utiliser la formule « toute faite » mais en calculant d'abord le nombre dérivé, qui est le coefficient directeur de la tangente, puis l'ordonnée à l'origine, connaissant les coordonnées du point en lequel la tangente est tangente à la courbe.

Dans l'exercice 1, question 3, après qu'on ait calculé $f'(-3)=25$, on dit que la tangente à la courbe en son point d'abscisse -3 a pour coefficient directeur 25.
Donc que l'équation réduite de la tangente est de la forme $\boxed{y=25x+p}$.

Pour calculer l'ordonnée à l'origine p , on détermine les coordonnées du point de la courbe qui a pour abscisse -3 . On le nomme par exemple A.

$y_A=f(-3)=-3\times(-3)^2+7\times(-3)-10=-27-21-10=-58$.

La tangente a une équation de la forme $y=25x+p$ et $A(-3;-58)$ appartient à la tangente,
donc $y_A=25x_A+p$, soit $-58=25\times(-3)+p \Leftrightarrow -58+75=p \Leftrightarrow 17=p$.

Une équation de la tangente à la courbe représentative de *f* en son point d'abscisse -3 est donc $\boxed{y=25x+17}$.

À la question 2 de l'exercice 3 :
On nomme A le point de la courbe d'abscisse -1 , celui en lequel (T) est tangente à la courbe.

On calcule $f'(-1)=-1$, qui est le coefficient directeur de (T).
(T) a donc une équation réduite de la forme $\boxed{y=-x+p}$.

On calcule l'ordonnée de A : $y_A=f(-1)=-4$
A ∈ (T), donc $y_A=-x_A+p$, soit $-4=-1\times(-1)+p \Leftrightarrow -4=1+p \Leftrightarrow -5=p$.

L'équation réduite de (T) est donc $\boxed{y=-x-5}$.