Calcul de dérivée avec le logarithme népérien.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)$. On cherche une expression de $f'(x)$.

1) Recherche de l'ensemble de définition de f. (Préalable indispensable pour savoir dans quel ensemble on travaille)

f est définie si et seulement si $\frac{2x+3}{x+1}>0$.

Recherche du zéro du numérateur : $2x+3=0 \Leftrightarrow 2x=-3 \Leftrightarrow \boxed{x=-\frac{3}{2}}$.

Recherche de la valeur interdite du quotient : $x+1=0 \Leftrightarrow \boxed{x=-1}$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+3}{x+1}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$$S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup]-1;+\infty[$$

f est définie sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup]-1;+\infty[$, et dérivable sur chacun des intervalles $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[$ et $]-1;+\infty[$.

⚠ *Certaines fonctions ne sont pas définies et dérivables sur les mêmes intervalles, mais comme la fonction* $\ln$ *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}^{+*}$*, c'est le cas ici.*

2) Calcul de $f'(x)$, sachant que x appartient soit à l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[$, soit à l'intervalle $]-1;+\infty[$.

$\boxed{f(x)=\ln(u(x))}$ avec $u(x)=\frac{2x+3}{x+1}$. Donc $\boxed{f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}}$.

$\boxed{u(x)=\frac{\mathrm{U}(x)}{\mathrm{V}(x)}}$ avec $\mathrm{U}(x)=2x+3$, $\mathrm{U}'(x)=2$, $\mathrm{V}(x)=x+1$, $\mathrm{V}'(x)=1$.

Donc $u'(x)=\frac{\mathrm{U}'(x)\mathrm{V}(x)+\mathrm{V}'(x)\mathrm{U}(x)}{(\mathrm{V}(x))^2}=\frac{2\times(x+1)-1\times(2x+3)}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x-3}{(x+1)^2}$ $\boxed{u'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}}$.

Donc $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{\frac{-1}{(x+1)^2}}{\frac{2x+3}{x+1}}=\frac{-1}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{2x+3}$ $\boxed{f'(x)=\frac{-1}{(x+1)(2x+3)}}$ en divisant le numérateur et le dénominateur par (x+1) que l'on sait non nul puisque $x\neq-1$.

Pour le vérifier avec la TI-NSpire CAS, on tape : $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)\right)$