Terminale STAV – Exercices sur les limites de fonctions - Corrigés

<u>Conseil</u> : essayez de vérifier tous vos calculs de limites par lecture des courbes tracées à la calculatrice.

Exercice 1 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+x$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+x=+\infty}$ (cf. tableau somme)

2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{3}{x}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0} 3=3\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x=0^-\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{3}{x}=-\infty}$ (cf. tableau quotient)

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sqrt{x}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sqrt{x}=+\infty}$ (produit)

4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{x^2-2}{x}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0} x^2-2=0^2-2=-2\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x=0^-\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{x^2-2}{x}=+\infty}$ (quotient avec règles des signes)

5) $\boxed{\lim\limits_{x\to3} 2x^2-x=2\times3^2-3=15}$ (puisque la fonction est définie et continue en 3)

Exercice 2 : f est définie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ par $\boxed{f(x)=1+\frac{1}{x}}$.

1) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0} 1=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 1+\frac{1}{x}=+\infty}$ (somme)

La courbe représentative de *f* admet donc une **asymptote verticale** d'équation $\boxed{x=0}$ (il s'agit de l'axe des ordonnées).

2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}=1}$ (somme)

La courbe représentative de *f* admet donc une **asymptote horizontale** d'équation $\boxed{y=1}$ en $+\infty$.

Exercice 3 : 1) Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{x+1}{x-2}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2} x+1=2+1=3\\ \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} x-2=0^-\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{x+1}{x-2}=-\infty}$

car lorsque x<2, $x-2<0$. (quotient avec règle des signes)

2) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -x=-\infty$

cas d'indétermination pour une somme.

Pour lever l'indétermination, on factorise l'expression : pour tout réel x, $x^2-x=x(x-1)$.

Comme $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -1=-1\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ (somme), on en déduit (produit) que $\lim\limits_{x\to+\infty} x(x-1)=+\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x=+\infty}$

<u>Remarque</u> : en l'infini, la limite d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré : cette règle (mais je ne sais pas si elle est au programme), donne directement le résultat : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

3) Calculons $\lim_{x\to-\infty}(x^3-1)\times\frac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty\\ \lim_{x\to-\infty} -1=-1\end{array}\right\}\text{donc } \lim_{x\to-\infty} x^3-1=-\infty\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\end{array}\right\}\text{ forme indéterminée (produit)}$$

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(x^3-1)\times\frac{1}{x}=x^2-\frac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \text{ donc } \lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{x}=0\end{array}\right\}\text{Donc } \lim_{x\to-\infty} x^2-\frac{1}{x}=+\infty \text{ donc } \boxed{\lim_{x\to-\infty}(x^3-1)\times\frac{1}{x}=+\infty}$$

4) Calculons $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x-1}{x^2-1}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} x-1=0^-\\ \text{Car lorsque } x<1,\ x-1<0\\ \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} x^2-1=0^-\\ \text{Car lorsque } 0<x<1,\ x^2<1\\ \text{donc } x^2-1<0.\end{array}\right\}\text{On est en présence d'une forme indéterminée (quotient)}$$

On peut factoriser le dénominateur en utilisant une identité remarquable, puis simplifier l'écriture :
Pour tout x de $\mathbb{R}-\{-1;1\}$, on a :
$$\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)\times1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1}$$

Or $\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ (peu importe si x<1 ou x>1)

Donc $\boxed{\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{2}}$

<u>Exercice 4</u> : f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{2x+4}{x^2+7}$.

Si l'on essaie de calculer les limites infinies de $f(x)$ en laissant son expression sous cette forme, on se retrouve dans un cas d'indétermination du théorème de la limite d'un quotient (l'infini sur l'infini).
Comme on s'intéresse aux x proches de l'infini, x est différent de 0.

On peut donc factoriser le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ par x (ou par x^2 si on veut pour le dénominateur), puis simplifier le quotient obtenu par x.

Pour tout $x\neq0$, $f(x)=\frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{7}{x^2}\right)}=\frac{2+\frac{4}{x}}{x\left(1+\frac{7}{x^2}\right)}$.

<u>Numérateur</u> : $\lim_{x\to+\infty} 4=4$ et $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$ donc $\lim_{x\to+\infty} 2+\frac{4}{x}=2+0=2$

<u>Dénominateur</u> :

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty} 7=7 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty \text{ donc } \lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x^2}=0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{7}{x^2}=1+0=1\end{array}\right\}\text{donc } \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{7}{x^2}\right)=+\infty \text{ (produit)}$$

Dans $\dfrac{2+\dfrac{4}{x}}{x\left(1+\dfrac{7}{x^2}\right)}$, le numérateur tend vers **2** lorsque x tend vers $+\infty$, et le dénominateur tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

D'après le théorème du calcul de la limite d'un quotient (tableau paragraphe II-4 du cours), $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\dfrac{4}{x}}{x\left(1+\dfrac{7}{x}\right)}=0$.

On a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0}$.

Pour le calcul de la limite en $-\infty$, on garde la même expression : $\dfrac{2+\dfrac{4}{x}}{x\left(1+\dfrac{7}{x^2}\right)}$.

Lorsque x tend vers $-\infty$, le <u>numérateur</u> tend vers <u>2</u>, $1+\dfrac{7}{x^2}$ tend vers 1 et x tend vers $-\infty$.

Le <u>dénominateur</u> tend donc vers <u>$-\infty$</u> (produit) donc le quotient tend vers 0. $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0}$.

<u>Exercice 5</u> : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2;-1\}$ par $f(x)=\dfrac{3x+5}{x^2+3x+2}$.

1) Lorsque x tend vers -2 ,

le numérateur tend vers $3\times(-2)+5=-1$ et le dénominateur vers $(-2)^2+3\times(-2)+2=0$.

La limite en -2 sera donc infinie, mais sera-ce $+\infty$ ou $-\infty$?

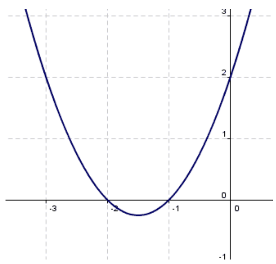
Pour appliquer la règle des signes, on a besoin de connaître le signe de x^2+3x+2 lorsque x est proche de -2 en lui étant inférieur (pour calculer $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)$), et de connaître son signe lorsque x tend vers -2 en lui étant supérieur (pour calculer $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)$).

Pour avoir se renseignement, étudions le signe du trinôme x^2+3x+2 selon les valeurs de x (voir programme de 1ère).

$\Delta=3^2-4\times1\times2=9-8=1=1^2$.   Les racines du trinôme sont : $x_1=\dfrac{-3-1}{2\times1}=-2$ et $x_2=\dfrac{-3+1}{2\times1}=-1$.

D'après nos connaissances sur les variations d'une fonction trinôme du second degré avec le coefficient de x^2 positif, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
x^2+3x+2		+	0	–	0	+	



$\lim\limits_{x\to-2} 3x+5=-1$

Lorsque $x<-2$, $x^2+3x+2>0$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} x^2+3x+2=0^+$

donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=-\infty}$

car $-1<0$ et $0^+>0$

2) Lorsque x tend vers -2 en lui étant supérieur, le tableau de signes nous dit que $x^2+3x+2<0$.

On a donc : $\lim\limits_{x\to-2} 3x+5=-1$

et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} x^2+3x+2=0^-$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=+\infty}$

car $-1<0$ et $0^-<0$, en appliquant la règle des signes.

3) Numérateur : lorsque x tend vers -1, $3x+5$ tend vers $3\times(-1)+5=2$. $\to 2$

Dénominateur : d'après le tableau de signes de x^2+3x+2, lorsque x tend vers 1 en lui étant inférieur, x^2+3x+2 tend vers 0 par valeurs négatives – ou 0^- – ($x^2+3x+2<0$). $\to 0^-$

D'après le tableau de la limite d'un quotient et la règle des signes, $f(x)$ tend donc vers $-\infty$.

On a $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=-\infty}$.

4) Numérateur : lorsque x tend vers -1, $3x+5$ tend vers $3\times(-1)+5=2$. $\to 2$

Dénominateur : d'après le tableau de signes de x^2+3x+2, lorsque x tend vers 1 en lui étant supérieur, x^2+3x+2 tend vers 0 par valeurs positives – ou 0^+ – ($x^2+3x+2>0$). $\to 0^+$

D'après le tableau de la limite d'un quotient et la règle des signes, $f(x)$ tend donc vers $+\infty$.

On a $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=+\infty}$.

Exercice 6 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$-$\{3\}$ par $\boxed{f(x)=\dfrac{5x+3}{3-x}}$.

1) Pour les limites en $+\infty$ et en $-\infty$, transformons l'expression de $f(x)$ (sinon on se retrouve dans un cas d'indétermination l'infini sur l'infini) :

Pour tout x différent de 0 et de 3, $f(x)=\dfrac{x\left(5+\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(\dfrac{3}{x}-1\right)}=\dfrac{5+\dfrac{3}{x}}{\dfrac{3}{x}-1}$.

Numérateur : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3=3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x}=0$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 5=5$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 5+\dfrac{3}{x}=5$. $\to 5$

Dénominateur : Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -1=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x}-1=-1$ $\to$ -1

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 5+\dfrac{3}{x}=5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x}-1=-1$, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-5}$.

Pour la limite en $-\infty$, on reprend exactement la même démarche : la seule différence est au début : $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ sinon, tout est identique, et l'on trouve $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-5}$.

Pour les limites à gauche et à droite en 3 :

$\lim\limits_{x\to3} 5x+3=5\times3+3=18$

Lorsque x<3, $-x>-3$ [1]

donc $3-x>0$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} 3-x=0^+$

donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x)=+\infty}$

(car 18 et 0^+ sont positifs)

$\lim\limits_{x\to3} 5x+3=18$

Lorsque x>3, $-x<-3$

donc $3-x<0$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} 3-x=0^-$

donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x)=-\infty}$

(car 18>0 et 0^-<0)

1 On rappelle que multiplier les deux membres d'une inégalité par -1 change le sens de cette inégalité.

2) Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -5$, on peut dire que **la droite d'équation** $\boxed{y=-5}$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$.
Comme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -5$, elle l'est aussi en $-\infty$.

Comme $\lim_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = +\infty$ et comme $\lim_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = -\infty$, **la droite d'équation** $\boxed{x=3}$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de f.

3)

x	-16	-10	-6	-2	-1	0	1	2	4	5	6
$f(x)$	$-4{,}1$	$-3{,}6$	-3	$-1{,}4$	$-0{,}5$	1	4	13	-23	-14	-11

x	8	10	16	20
$f(x)$	$-8{,}6$	$-7{,}6$	$-6{,}4$	$-6{,}1$

4)