Terminale STAV – Devoir-Maison sur les limites et la dérivation – Pour le mercredi 3 octobre 2012.

## Énoncé.

Exercice 1 : Soit $f$ la fonction définie sur ℝ par $f(x)=x^3-12x^2+48x+3$ .
a) Calculer $f'(x)$
b) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de *f* sur ℝ.

Exercice 2 :
1) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x+2)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{2-x}$

2) Dans chaque cas, déterminer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition *Df* :

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$ $Df=]-\infty;3[$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{x+1}{x-1}$ $Df=]1;2[$

## Corrigé :

Exercice 1 : a) $f'(x)=3x^2-12\times 2x+48\times 1+0$ $\boxed{f'(x)=3x^2-24x+48}$

b) $f'(x)=3(x^2-8x+16)$ $x^2-8x+16$ est une identité remarquable
(si ça ne saute pas aux yeux, on s'en rend compte en calculant le discriminent : on trouve $\Delta=0$ .)

$f'(x)=3(x^2-2\times x\times 4+4^2)$ $\boxed{f'(x)=3(x-4)^2}$

| $x$ | $-\infty$ | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | + | | + | |
| $(x-4)^2$ | | + | 0 | + | |
| $f'(x)$ | | + | 0 | + | |
| $f$ | | | $\nearrow$ | | |

$f$ est strictement croissante sur ℝ. (Voir en annexe la courbe tracée avec Geogebra pour vérification par lecture graphique).

Exercice 2 :
1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(x-1)+2$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x-1=+\infty\end{array}\right\}\text{donc } \lim\limits_{x\to+\infty}x(x-1)=+\infty\\ \qquad\qquad\qquad\text{(limite d'un produit)}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}2=2\end{array}\right\}\text{Donc } \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-x+2=+\infty} \text{ (Règles sur la limite d'une somme)}$$

Remarque : j'ai pris soin de contourner la règle : « La limite infinie d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré » car je ne sais pas si elle est au programme.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-2x+1}{2-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{x\left(\frac{2}{x}-1\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{2}{x}-1}$

Numérateur : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} 1=1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -2=-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{2}{x^2}=0}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3}=0}$

D'après les règles opératoires sur la limite d'une somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}=1}$

Et d'après les règles opératoires sur la limite d'un produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})=+\infty}$

Dénominateur :

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}=0}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} -1=-1}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}-1=-1}$

D'après la règle des signes et les règles opératoires sur la limite d'un quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-2x+1}{2-x}=-\infty}$.

2) a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$ $\quad Df=]-\infty;3[$

- Limite de $f$ en $-\infty$ :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\times x}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{1-\frac{3}{x}}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} 1=1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -3=-3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{3}{x}=0}$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{3}{x}=1}$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{1-\frac{3}{x}}=-\infty}$

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$.

- Limite de $f$ en 3 par valeurs inférieures :

$\boxed{\lim\limits_{x\to3} x^2=3^2=9}$

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} x-3}=0^-$ car $3-3=0$ et $x-3<0$ lorsque $x<3$

donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} \dfrac{x^2}{x-3}=-\infty}$ d'après la règle des signes et les règles opératoires sur la limite d'un quotient.

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = -\infty}$. (cf. courbe en annexe)

La courbe représentative de *f* admet une asymptote verticale d'équation $x=3$ .

b) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{x+1}{x-1}$ $\qquad Df=]1;2[$

- Limite à droite en 1 :

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{1-2}=\dfrac{1}{-1}=-1} \\ \left.\begin{array}{l} \boxed{\lim\limits_{x\to1} x+1=1+1=2} \\ \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x-1}=0^+ \end{array}\right\} \text{donc } \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{x+1}{x-1}=+\infty} \end{array}\right\} \text{donc } \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{1}{x-2}+\dfrac{x+1}{x-1}=+\infty} \text{ soit } \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty}$$

(d'après les règles sur la limite d'une somme)

La courbe représentative de *f* admet donc une asymptote verticale d'équation $x=1$ .

- Limite à gauche en 2 :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \boxed{\lim\limits_{x\to2} 1=1} \\ \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} x-2}=0^- \end{array}\right\} \text{donc } \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{1}{x-2}=-\infty} \\ \boxed{\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{2+1}{2-1}=\dfrac{3}{2}} \end{array}\right\} \text{donc } \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{1}{x-2}+\dfrac{x+1}{x-2}=-\infty} \text{ soit } \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=-\infty}.$$

(d'après les règles sur la limite d'une somme)

La courbe représentative de *f* admet donc une asymptote verticale d'équation $x=2$ .

## Annexes :