Terminale STAV – Chapitre 3 – La fonction logarithme népérien
Résumé du cours

<u>Définition</u> : **la fonction logarithme népérien**, notée $\boxed{\ln}$, est la primitive de la fonction inverse sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

<u>Conséquences</u> :

- $\ln(1)=0$
- $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout x de $]0;+\infty[$, $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.

<u>Règles de calcul avec la fonction *ln*</u> : Pour tous $a>0$ et $b>0$ et n $\in \mathbb{Q}$ (ensemble des rationnels) :

$$\ln(a\times b)=\ln(a)\times\ln(b) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln(b) \qquad \ln(a^n)=n\ln(a)$$

<u>Étude de la fonction *ln*</u> :

- Son ensemble de définition est $\mathbb{R}^{+*}=]0;+\infty[$
- Pour tout x $\in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln'(x)=\frac{1}{x}$ donc $\ln'(x)>0$ puisque x>0. La fonction $\ln$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Il existe un unique nombre nommé *e* tel que $\ln(e)=1$. e≈2,72
- ln(x) est
  - négatif si 0<x<1
  - nul si x=1
  - positif si x>1

<u>Tableau de signes</u> :

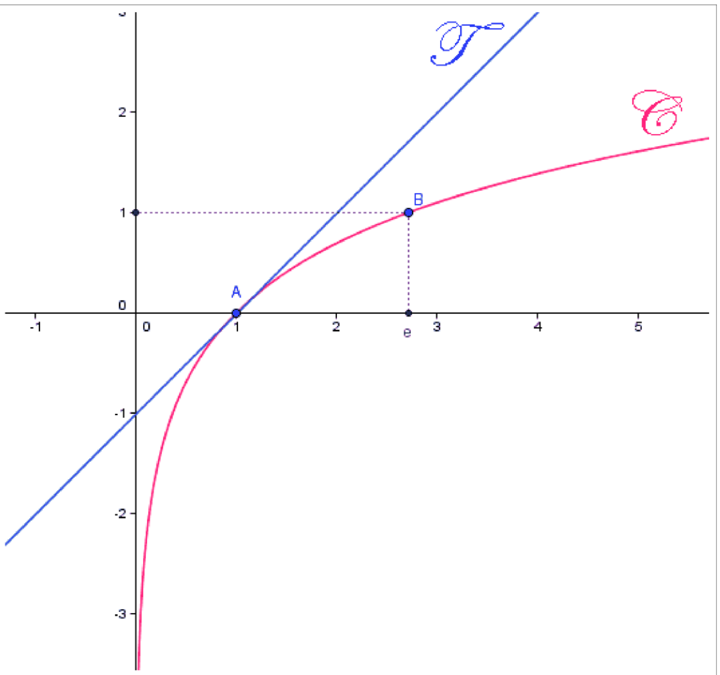
x	0		1		$+\infty$
ln(x)	‖	–	0	+	

<u>Limites à connaître par ♥</u> :

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to0}\ln(x)=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln(x)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$$

« La fonction $x\mapsto x$ et ses puissances «remportent » sur le logarithme dans les calculs de limites » (Mnémotechnique)



- La courbe $\mathcal{C}$, représentative de la fonction logarithme népérien, passe par les points A(1;0) et B(e;1).
- Le coefficient directeur de sa tangente $\mathcal{T}$ en A est 1, puisque $f'(1)=\frac{1}{1}=1$.

Comme la fonction *ln* est strictement croissante de $]0;+\infty[$ dans $]-\infty;+\infty[$: Pour tous x>0 et y>0 :

- $\ln(x)=\ln(y) \Leftrightarrow x=y$
- $\ln(x)<\ln(y) \Leftrightarrow x<y$
- $\ln(x)\leqslant\ln(y) \Leftrightarrow x\leqslant y$

- Pour toute fonction *u* dérivable sur un intervalle I à valeurs strictement positives : $(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$

  Donc une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln(u)$