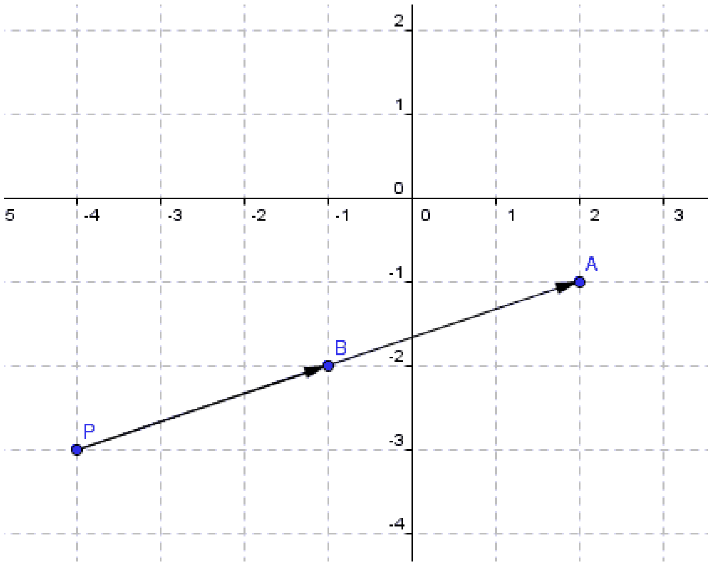
Exercices de préparation au contrôle du jeudi 25 octobre 2012 - Corrigés.
Complexes (forme algébrique – Conjugué – Équations) – Bernoulli, loi binomiale et échantillonnage.

Exercice 1 : $z_1=2-\text{i}$ et $z_2=-1-2\text{i}$.

1) $p=z_1\times z_2=(2-\text{i})\times(-1-2\text{i})=-2-4\text{i}+\text{i}+2\text{i}^2$
$\boxed{p=-4-3\text{i}}$



3) $\overrightarrow{PA}$ a pour affixe z_A-z_P , soit z_1-p
$z_1-p=2-\text{i}-(-4-3\text{i})=2-\text{i}+4+3\text{i}$
$\overrightarrow{PA}$ a pour affixe $\boxed{6+2\text{i}}$.

$\overrightarrow{PB}$ a pour affixe z_B-z_P , soit z_2-p .
$z_2-p=-1-2\text{i}-(-4-3\text{i})=-1-2\text{i}+4+3\text{i}$
$\overrightarrow{PB}$ a pour affixe $\boxed{3+\text{i}}$.

$z_{\overrightarrow{PA}}=2\,z_{\overrightarrow{PB}}$ donc $\overrightarrow{PA}=2\,\overrightarrow{PB}$, donc B est le milieu de [AP].

Exercice 2 : 1) $\left(\frac{1-\text{i}}{1+\text{i}}\right)^2=\frac{(1-\text{i})^2}{(1+\text{i})^2}=\frac{1-2\text{i}+\text{i}^2}{1+2\text{i}-\text{i}^2}=\frac{1-2\text{i}-1}{1+2\text{i}-1}=\frac{-2\text{i}}{2\text{i}}$ $\boxed{\left(\frac{1-\text{i}}{1+\text{i}}\right)^2=-1}$

Sans la formule $(a-b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$:

$B=(2-\text{i})^3-(1+\text{i})(1-2\text{i})(1+3\text{i})$
$B=(2-\text{i})^2(2-\text{i})-(1-2\text{i}+\text{i}-2\text{i}^2)(1+3\text{i})$
$B=(4-4\text{i}+\text{i}^2)(2-\text{i})-(1-\text{i}+2)(1+3\text{i})$
$B=(3-4\text{i})(2-\text{i})-(3-\text{i})(1+3\text{i})$
$B=6-3\text{i}-8\text{i}+4\text{i}^2-(3+9\text{i}-\text{i}-3\text{i}^2)$
⚠ Ne pas oublier de développer dans une parenthèse après un –.
$B=6-11\text{i}-4-(3+8\text{i}+3)$
$B=2-11\text{i}-(6+8\text{i})$
$B=2-11\text{i}-6-8\text{i}$
$\boxed{B=-4-19\text{i}}$

$C=(-2+3\text{i})^4$
$C=(-2+3\text{i})^2\times(-2+3\text{i})^2$
$C=(4-12\text{i}+9\text{i}^2)\times(4-12\text{i}+9\text{i}^2)$
$C=(-5-12\text{i})^2$
$C=25-(-120\text{i})+144\text{i}^2$
$C=25+120\text{i}-144$
$\boxed{C=-119+120\text{i}}$

Avec la formule $(a-b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$:

$B=(2-\text{i})^3-(1+\text{i})(1-2\text{i})(1+3\text{i})$
$B=8-3\times2^2\times\text{i}+3\times2\times\text{i}^2-\text{i}^3+(1-2\text{i}-\text{i}-2\text{i}^2)(1+3\text{i})$ $B=8-12\text{i}-6+\text{i}-(3-\text{i})(1+3\text{i})$
$B=2-11\text{i}-(3+9\text{i}-\text{i}-3\text{i}^2)$
$B=2-11\text{i}-(6+8\text{i})$
$\boxed{B=-4-19\text{i}}$

2) $f(z)=\frac{1+z+z^2+z^3}{1+z}$ a) $f(\text{i})=\frac{1+\text{i}+\text{i}^2+\text{i}^3}{1+\text{i}}=\frac{1+\text{i}-1-\text{i}}{1+\text{i}}$ $\boxed{f(\text{i})=0}$

$f(\text{i}-1)=\frac{1+(\text{i}-1)+(\text{i}-1)^2+(\text{i}-1)^3}{1+(\text{i}-1)}=\frac{\text{i}+\text{i}^2-2\text{i}+1+\text{i}^3-3\text{i}^2+3\text{i}-1}{\text{i}}=\frac{\text{i}-1-2\text{i}+1-\text{i}+3+3\text{i}-1}{\text{i}}$

$f(\mathrm{i}-1)=\dfrac{2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ $\quad f(\mathrm{i}-1)=\dfrac{(2+\mathrm{i})\times(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})}$ $\quad f(\mathrm{i}-1)=\dfrac{-2\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{1}$ $\quad \boxed{f(\mathrm{i}-1)=1-2\mathrm{i}}$

$$f(2+\mathrm{i})=\frac{1+(2+\mathrm{i})+(2+\mathrm{i})^2+(2+\mathrm{i})^3}{1+(2+\mathrm{i})}=\frac{3+\mathrm{i}+4+4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+8+12\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3}{3+\mathrm{i}}=\frac{15+17\mathrm{i}-1-6-\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}=\frac{8+16\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}$$

$$f(2+\mathrm{i})=\frac{(8+16\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{(3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}=\frac{24-8\mathrm{i}+48\mathrm{i}-16\mathrm{i}^2}{9-\mathrm{i}^2}=\frac{40+40\mathrm{i}}{10}=4+4\mathrm{i} \qquad \boxed{f(2+\mathrm{i})=4+4\mathrm{i}}$$

Méthode plus astucieuse si l'on remarque que le numérateur de f(z) se factorise par (1+z) :

Pour tout $z\neq -1$, $f(z)=\dfrac{1+z+z^2(1+z)}{1+z}=\dfrac{(1+z)(1+z^2)}{1+z}$ $\qquad f(z)=1+z^2$

$f(\mathrm{i})=1+\mathrm{i}^2=1-1=0$ $\qquad f(\mathrm{i}-1)=1+(\mathrm{i}-1)^2=1+\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}+1=1-2\mathrm{i}$

$f(2+\mathrm{i})=1+(2+\mathrm{i})^2=1+4+4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=1+4+4\mathrm{i}-1=4+4\mathrm{i}$

b) On résout dans $\mathbb{C}-\{-1\}$ $\quad f(z)=0 \Leftrightarrow 1+z^2=0$ (au moment de résoudre, on est obligé de penser à la factorisation) $\quad f(z)=0 \Leftrightarrow z^2=-1 \Leftrightarrow z=\mathrm{i}$ ou $z=-\mathrm{i}$ $\qquad \boxed{S=\{-\mathrm{i}\,;\mathrm{i}\}}$

Exercice 3 : 1) $z^2+2z+3=0 \quad (E_1)$

$\Delta=2^2-4\times1\times3=4-12=-8$

$\Delta=(\mathrm{i}\sqrt{8})^2=(2\mathrm{i}\sqrt{2})^2$

L'équation admet deux solutions :

$z_1=\dfrac{-2-2\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}=-1-\mathrm{i}\sqrt{2}$

$z_2=\dfrac{-2+2\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}=-1+\mathrm{i}\sqrt{2}$

$\boxed{S=\{-1-\mathrm{i}\sqrt{2}\,;-1+\mathrm{i}\sqrt{2}\}}$

2) $z^2=-z-1 \quad (E_2)$

$(E_2) \Leftrightarrow z^2+z+1=0$

$\Delta=1^2-4\times1\times1=-3$

$\Delta=(\mathrm{i}\sqrt{3})^2$

L'équation admet deux solutions :

$z_1=\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

et $z_2=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{S=\{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\,;-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\}}$

3) $(1+2\mathrm{i})z-(\mathrm{i}-1)=iz-3 \quad (E_3)$

$(E_3) \Leftrightarrow (1+2\mathrm{i}-\mathrm{i})z=-3+\mathrm{i}-1$

$(E_3) \Leftrightarrow (1+\mathrm{i})z=-4+\mathrm{i}$

$(E_3) \Leftrightarrow z=\dfrac{-4+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

$(E_3) \Leftrightarrow z=\dfrac{(-4+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}$

$(E_3) \Leftrightarrow z=\dfrac{-4+4\mathrm{i}+\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}^2}$

$(E_3) \Leftrightarrow z=\dfrac{-3+5\mathrm{i}}{2}$

$\boxed{S=\{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}\}}$

4) $z^4+6z^2+25=0 \quad (E_4)$ (On vérifiera que $(1+2\mathrm{i})^2=-3+4\mathrm{i}$)

Posons $Z=z^2$ et résolvons préalablement (E'_4) $Z^2+6Z+25=0$.

$\Delta=6^2-4\times1\times25=36-100=-64=(8\mathrm{i})^2$

Les solutions de (E'_4) sont $Z_1=\dfrac{-6-8\mathrm{i}}{2}=-3-4\mathrm{i}$ et $Z_2=\dfrac{-6+8\mathrm{i}}{2}=-3+4\mathrm{i}$.

Les solutions de (E_4) sont les solutions des deux équations $z^2=-3-4\mathrm{i}$ et $z^2=-3+4\mathrm{i}$.

L'énoncé nous suggère de vérifier que $(1+2\mathrm{i})^2=-3+4\mathrm{i}$.

$(1+2\mathrm{i})^2=1+4\mathrm{i}+(2\mathrm{i})^2=1+4\mathrm{i}-4=-3+4\mathrm{i}$.

On devine alors que $(1-2\mathrm{i})^2=1-4\mathrm{i}+(2\mathrm{i})^2=1-4\mathrm{i}-4=-3-4\mathrm{i}$.

L'équation $z^2=-3+4\mathrm{i}$ est une équation du second degré, donc elle admet au plus deux solutions.

On sait que l'une d'elles est $\boxed{1+2i}$, on sait aussi que deux nombres opposés ont le même carré, donc que $\boxed{-1-2i}$ est aussi solution de $z^2=-3+4i$.

De même, $z^2=-3-4i$ a pour solutions $\boxed{1-2i}$ et $\boxed{-1+2i}$. $\boxed{S=\{-1-2i;-1+2i;1-2i;1+2i\}}$.

5) $\dfrac{1+2iz}{1+2z}=i\dfrac{z-1}{z+3}$ (E_5)

Valeurs interdites ?

$1+2z=0 \Leftrightarrow z=-\dfrac{1}{2}$ et $z+3=0 \Leftrightarrow z=-3$.

On résout dans $\mathbb{C}-\{-3;-\frac{1}{2}\}$

$(E_5) \Leftrightarrow (z+3)(1+2iz)=i(z-1)(1+2z)$

$(E_5) \Leftrightarrow z+2iz^2+3+6iz=i(z+2z^2-1-2z)$

$(E_5) \Leftrightarrow 2iz^2+z+6iz+3=iz+2iz^2-i-2iz$

$(E_5) \Leftrightarrow z+7iz=-3-i$

$(E_5) \Leftrightarrow z=\dfrac{-3-i}{1+7i} \Leftrightarrow z=\dfrac{(-3-i)(1-7i)}{(1+7i)(1-7i)}$

$(E_5) \Leftrightarrow z=\dfrac{-3+21i-i+7i^2}{1^2-(7i)^2}$

$(E_5) \Leftrightarrow z=\dfrac{-10+20i}{50} \Leftrightarrow z=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$.

Cette valeur n'est égale ni à $-\dfrac{1}{2}$, ni à -3, donc :

$$\boxed{S=\{-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\}}$$

6) $i\overline{z}-1=2z+2i$ (E_6)

Posons $z=x+iy$ avec $x=\mathrm{Re}(z)$ et $y=\mathrm{Im}(z)$.

On a donc $\overline{z}=x-iy$.

On résout donc dans $\mathbb{R}^2$:

$i(x-iy)-1=2(x+iy)+2i$ (E'_6)

$(E'_6) \Leftrightarrow ix+y-1=2x+2iy+2i$

$(E'_6) \Leftrightarrow \begin{cases} y-1=2x \\ x=2y+2 \end{cases}$ En identifiant la partie réelle et la partie imaginaire des deux membres.

$(E'_6) \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ x=2(2x+1)+2 \end{cases}$ par exemple, si on souhaite résoudre par substitutions.

$(E'_6) \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ x=4x+2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2\times\left(-\frac{4}{3}\right)+1 \\ -3x=4 \end{cases}$

$(E'_6) \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{5}{3} \\ x=-\frac{4}{3} \end{cases}$. L'équation E_6 admet donc une unique solution. $\boxed{S=\{-\frac{4}{3}-\frac{5}{3}i\}}$.

Exercice 4 : Soit S(n) la somme : $1+i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^n$. Soit p un entier naturel quelconque.

1) Si $n=4p$, $i^n=i^{4p}=(i^4)^p=1^p=1$ $\boxed{i^n=1}$.

Si $n=4p+1$, $i^n=i^{4p+1}=i^{4p}\times i=1\times i=i$ $\boxed{i^n=i}$.

Si $n=4p+2$, $i^n=i^{4p+2}=i^{4p+1}\times i=i\times i=-1$ $\boxed{i^n=-1}$

Si $n=4p+3$, $i^n=i^{4p+3}=i^{4p+2}\times i=-1\times i=-i$ $\boxed{i^n=-i}$

2)

$$\begin{array}{rcccccccc} S(n) = & 1 & + i & + i^2 & + i^3 & + \ldots & & + i^n & \\ -iS(n) = & & - i & - i^2 & - i^3 & - \ldots & & - i^n & - i^{n+1} \\ \hline (1-i)S(n) = & 1 & & & & & & & - i^{n+1} \end{array}$$

Donc $S(n)=\dfrac{1-i^{n+1}}{1-i}$.

3) Si $\boxed{n=4p}$, $i^{n+1}=i^{4p+1}=i$, donc $S(n)=\dfrac{1-i}{1-i}=1$ $\boxed{S(n)=1}$.

Si $\boxed{n=4p+1}$, $i^{n+1}=i^{4p+2}=-1$, donc $S(n)=\dfrac{1-(-1)}{1-i}=\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2(1+i)}{2}$ $\boxed{S(n)=1+i}$.

Si $\boxed{n=4p+2}$, $i^{n+1}=i^{4p+3}=-i$, donc $S(n)=\dfrac{1-(-i)}{1-i}=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\dfrac{2i}{2}=i$ $\boxed{S(n)=i}$.

Si $\boxed{n=4p+3}$, $i^{n+1}=i^{4p+4}=i^{4p}\times i^4=1\times 1=1$, donc $S(n)=\dfrac{1-1}{1-i}$ $\boxed{S(n)=0}$.