Exercice 1 : $A(x)=\exp(3x-1)\times\exp(2-x)$

$A(x)=\exp[3x-1+2-x]$

$\boxed{A(x)=\exp(2x+1)}$

$B(x)=\dfrac{\exp(x-5)}{\exp(2x-1)}=\exp[x-5-(2x-1)]$

$B(x)=\exp(x-5-2x+1)$

$\boxed{B(x)=\exp(-x-4)}$

$C(x)=(\exp(2x))^3$

$C(x)=\exp(2x\times 3)$

$\boxed{C(x)=\exp(6x)}$

$D(x)=(\exp(-x))^2$

$D(x)=\exp(-x\times 2)$

$\boxed{D(x)=\exp(-2x)}$

$E(x)=\dfrac{\exp(-x+4)}{\exp(x+4)}$

$E(x)=\exp(-x+4-(x+4))$

$\boxed{E(x)=\exp(-2x)}$

$F(x)=(\exp(x+3)\times\exp(-2x-2))^2$

$F(x)=(\exp(x+3+(-2x-2)))^2$

$F(x)=(\exp(-x+1))^2$

$F(x)=\exp((-x+1)\times 2)$

$\boxed{F(x)=\exp(-2x+2)}$

Exercice 2 :

$A=e^{-3,2}\times e^{7,3} = e^{-3,2+7,3} = \boxed{e^{4,1}}$

$B=(e^{-2,1})^5 = e^{-2,1\times 5} = \boxed{e^{-10,5}}$

$C=\dfrac{e^{3,4}}{e^{4,2}} = e^{3,4-4,2} = \boxed{e^{-0,8}}$

$D=\left(\dfrac{e^{-2,1}}{e^{-3,2}}\right)^3 = (e^{-2,1-(-3,2)})^3 = (e^{-2,1+3,2})^3$

$D = (e^{1,1})^3 = e^{1,1\times 3} = \boxed{e^{3,3}}$

$E=e^{\sqrt{3}}\times e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = e^{\sqrt{3}+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = e^{\frac{3\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \boxed{e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}}$

$F=(e^{\sqrt{2}})^2 = \boxed{e^{2\sqrt{2}}}$

$G=\dfrac{(e^2)^3\times(e^3)^{-2}}{e^2}$ $\quad G=\dfrac{e^6\times e^{-6}}{e^2}$ $\quad G=\dfrac{e^0}{e^2}$

$\boxed{G=e^{-2}}$

$H=\dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{(e^3)^{\frac{3}{4}}}$ $\quad H=\dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{3\times\frac{3}{4}}}$ $\quad H=\dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{9}{4}}}$ $\quad H=e^{\frac{1}{2}-\frac{9}{4}}$

$H=e^{\frac{2}{4}-\frac{9}{4}}$ $\quad \boxed{H=e^{-\frac{7}{4}}}$

$I=\dfrac{e^{1,2}\times e^{-0,3}}{e^{3,5}\times e^{-1}}$ $\quad I=\dfrac{e^{0,9}}{e^{2,5}}$ $\quad \boxed{I=e^{-1,6}}$

$J=(e^{0,5}-e^{-0,5})^2$

$J=(e^{0,5})^2-2\times e^{0,5}\times e^{-0,5}+(e^{-0,5})^2$

$J=e^1-2\times e^0+e^{-1}$

$J=e-2\times 1+\dfrac{1}{e}$ $\quad J=\dfrac{e^2-2e+1}{e}$ $\quad \boxed{J=\dfrac{(e-1)^2}{e}}$

ou $\boxed{J=e+2+e^{-1}}$

$K=(e^{2-\sqrt{3}})^{2+\sqrt{3}}$ $\quad K=e^{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$

$K=e^{(4-3)}$ $\quad K=e^1$ $\quad \boxed{K=e}$

$L=\dfrac{e^{3,6}}{e^{2,7}}$ $\quad L=e^{3,6-2,7}$ $\quad \boxed{L=e^{0,9}}$

$M=e^2\times e^{-1,4}$ $\quad M=e^{2+(-1,4)}$ $\quad \boxed{M=e^{0,6}}$

$N=\dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{3}}}$ $\quad N=e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ $\quad N=e^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$ $\quad \boxed{N=e^{1/6}}$

Exercice 3 : $A(x)=e^x\times e^{-x+2}$ $\quad A(x)=e^{x-x+2}$

$\boxed{A(x)=e^2}$

$B(x)=(e^{-x})^2\times(e^{3x})^3$ $\quad B(x)=e^{-2x}\times e^{9x}$

$\boxed{B(x)=e^{7x}}$

$C(x)=2(e^{2x}+e^{-2x})-(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2$

$C(x)=2e^{2x}+2e^{-2x}-((e^x)^2+2e^x e^{-x}+(e^{-x})^2)$
$\qquad -((e^x)^2-2e^x e^{-x}+(e^{-x})^2)$

$C(x)=2e^{2x}+2e^{-2x}-(e^{2x}+2\times e^0+e^{-2x})$
$\qquad -(e^{2x}-2\times e^0+e^{-2x})$

$C(x)=2e^{2x}+2e^{-2x}-e^{2x}-2-e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}$

$C(x)=2e^{2x}+2e^{-2x}-2e^{2x}-2e^{-2x}$ $\quad \boxed{C(x)=0}$

$D(x)=4e^{4x}\times(-5e^{-3x+2})$

$D(x)=-20\times e^{4x-3x+2}$

$\boxed{D(x)=-20\,e^{x+2}}$

$E(x)=\dfrac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}\times\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{2}$

$E(x)=\dfrac{(e^{3x})^2-(e^{-3x})^2}{4}$ $\boxed{E(x)=\dfrac{e^{6x}-e^{-6x}}{4}}$

$F(x)=\dfrac{e^{-3x+5}\times(e^{x+2})^3}{e^{-2x-6}}$

$F(x)=\dfrac{e^{-3x+5}\times e^{3x+6}}{e^{-2x-6}}$

$F(x)=\dfrac{e^{11}}{e^{-2x-6}}$ $F(x)=e^{11+2x+6}$ $\boxed{F(x)=e^{2x+17}}$

$G(x)=e^{3x+5}\times(e^{-x+1})^3\times(e^{2x+2})^2$

$G(x)=e^{3x+5}\times e^{-3x+3}\times e^{4x+4}$

$\boxed{G(x)=e^{4x+12}}$

Exercice 4 : Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$f(x)=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$.

$f(x)=\dfrac{(e^x+e^{-x})^2}{4}-\dfrac{(e^x-e^{-x})^2}{4}$

$f(x)=\dfrac{(e^x)^2+2\times e^x\times e^{-x}+(e^{-x})^2-((e^x)^2-2\times e^x\times e^{-x}+(e^{-x})^2)}{4}$

$f(x)=\dfrac{2e^xe^{-x}+2e^xe^{-x}}{4}$

$f(x)=\dfrac{4e^xe^{-x}}{4}$ $f(x)=e^xe^{-x}$ $f(x)=e^{x-x}$

$f(x)=e^0$ $\boxed{f(x)=1}$.

Exercice 5 : Pour prouver une égalité A=B (attention à ne pas confondre avec résoudre une équation !), on a trois possibilités :

- On calcule A=.....=B et on arrive à B
- On calcule B=....=A et on arrive à A
- On calcule A=...=C puis B=...=C et on arrive au même résultat.

Ce sont les procédures les plus courantes. Il peut y en avoir d'autres, plus délicates à rédiger, comme utiliser la règle du produit en croix (mais il faut prouver que b et d sont non-nuls dans $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$)

1) Prouvons que : $\dfrac{5}{1+e^x}=5-\dfrac{5}{1+e^{-x}}$

Vérifions préalablement que les deux membres sont définis (c'est-à-dire « existent ») pour tout réel x :

Les dénominateurs sont non nuls car, pour tout x ∈ $\mathbb{R}$, $e^x>0$, donc on a aussi $e^{-x}>0$.
Donc $1+e^x>1$ et $1+e^{-x}>1$, donc $1+e^x\neq 0$ et $1+e^{-x}\neq 0$.
Les expressions des deux membres sont donc bien définies pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Réduisons le second membre au même dénominateur :

$\boxed{5-\dfrac{5}{1+e^{-x}}}=\dfrac{5(1+e^{-x})-5}{1+e^{-x}}=\dfrac{5+5e^{-x}-5}{1+e^{-x}}$

$=\boxed{\dfrac{5e^{-x}}{1+e^{-x}}}$

L'expression obtenue ressemble un peu plus à celle du premier membre.

Partons à présent du premier membre, en multipliant son numérateur et son dénominateur par e^{-x} (on ne change pas la valeur d'une écriture fractionnaire lorsqu'on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul)

$\boxed{\dfrac{5}{1+e^x}}=\dfrac{5e^{-x}}{(1+e^x)\times e^{-x}}=\dfrac{5e^{-x}}{e^{-x}+e^xe^{-x}}=\dfrac{5e^{-x}}{e^{-x+1}}$

$=\boxed{\dfrac{5e^{-x}}{1+e^{-x}}}$

(même expression que celle trouvée dans le calcul précédent)

On a bien prouvé que, pour tout réel x, on a :

$\boxed{\dfrac{5}{1+e^x}=5-\dfrac{5}{1+e^{-x}}}$

2) Prouvons que : $\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

Les deux membres sont bien définis pour tout réel x (ce sont les mêmes qu'au (1))

Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$\dfrac{1}{1+e^{-x}}=\dfrac{1\times e^x}{(1+e^{-x})\times e^x}=\dfrac{e^x}{e^x+e^{-x}\times e^x}=\dfrac{e^x}{e^x+e^0}$

$=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ L'égalité est vraie.

3) Prouvons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $e^x + e^{-x} > 0$ donc $e^x + e^{-x} \neq 0$.
$e^{-2x} > 0$, donc $1 + e^{-2x} > 1$, donc $1 + e^{-2x} \neq 0$.
Les deux membres sont bien définis pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{(1-e^{-2x}) \times e^x}{(1+e^{-2x}) \times e^x} = \frac{e^x - e^{-2x} \times e^x}{(e^x + e^{-2x} \times e^x)}$$

(On peut multiplier le numérateur et le dénominateur par e^x car celui-ci est non nul, puisque strictement positif)

Donc $\boxed{\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$.

L'égalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) $$\frac{e^{-x}}{e^{-x} + x^2} = \frac{1}{1 + x^2 e^x}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ et $x^2 \geqslant 0$, donc $e^{-x} + x^2 > 0$, donc $e^{-x} + x^2 \neq 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ et $e^x > 0$ donc $x^2 e^{-x} \geqslant 0$, donc $1 + x^2 e^x > 1$ donc $1 + x^2 e^x \neq 0$.

Les deux membres de l'égalité sont bien définis pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{1+x^2 e^x} = \frac{1 \times e^{-x}}{(1+x^2 e^x) \times e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + x^2 \times e^x \times e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + x^2 \times 1}$$

Donc $\boxed{\dfrac{1}{1+x^2 e^x} = \dfrac{e^{-x}}{1+x^2 e^x}}$

5) $$\frac{e^x - 4}{e^x + 3} = 1 - \frac{7}{e^x + 3}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $e^x + 3 > 3$ donc $e^x + 3 \neq 0$. Les deux membres de l'égalité sont bien définis pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Réduisons le second membre au même dénominateur :

$\boxed{1 - \dfrac{7}{e^x+3} = \dfrac{e^x+3}{e^x+3} - \dfrac{7}{e^x+3} = \dfrac{e^x - 4}{e^x+3}}$.

L'égalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : 1) $f(x) = e^{-x}$ $\boxed{f'(x) = -e^{-x}}$

$$x \xmapsto{\ u\ } -x \xmapsto{\ v\ } e^{-x}$$

$$x \xmapsto{\ v\,o\,u\ } e^{-x}$$

En effet : $f = v\,o\,u$ avec $u(x) = -x$ et $v(x) = e^x$, donc $u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = u'(x) \times v'\,o\,u(x)$
$= -1 \times e^{-x} = -e^{-x}$

2) $f(x) = e^{3x}$ $\boxed{f'(x) = 3e^{3x}}$. (Reprendre le raisonnement ci-dessus avec $u(x) = 3x$)

3) $f(x) = e^{x+1}$ $\boxed{f'(x) = e^{x+1}}$. (Reprendre le raisonnement ci-dessus avec $u(x) = x+1$)

4) $f(x) = e^{3x-2}$ $\boxed{f'(x) = 3e^{3x-2}}$ (Reprendre le raisonnement ci-dessus avec $u(x) = 3x - 2$)

5) $f(x) = xe^x$ $f(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$

$\boxed{f'(x)} = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x) = 1 \times e^x + e^x \times x = \boxed{(1+x)e^x}$

6) $f(x) = x^2 e^x$ $f(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = x^2$, $v(x) = e^x$, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^x$.

$\boxed{f'(x)} = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x) = 2x \times e^x + e^x \times x^2 = \boxed{(2x + x^2)e^x} = \boxed{x(2+x)e^x}$

7) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$

$$\boxed{f'(x)} = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{1\times e^x - e^x\times x}{(e^x)^2} = \frac{(1-x)e^x}{(e^x)^2} = \boxed{\frac{1-x}{e^x}}$$

Remarque : on peut diviser le numérateur et le dénominateur par e^x car on sait d'après le cours que e^x est non nul quel que soit le réel x .

8) $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$ $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=x^2$, $v(x)=e^x$, $u'(x)=2x$ et $v'(x)=e^x$.

$$\boxed{f'(x)} = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2} =$$

$$\frac{2x\times e^x - e^x\times x^2}{(e^x)^2} = \frac{(2x-x^2)e^x}{(e^x)^2} = \boxed{\frac{2x-x^2}{e^x}}$$

ou encore $\boxed{\frac{x(2-x)}{e^x}}$

(On choisit de factoriser au maximum l'expression des dérivées, puisque la plupart du temps, on s'intéresse à leur signe.)

Exercice 7 : 1) $f(x)=\frac{e^x}{x}$

Pour tout x de]0;+∞[, $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=u'(x)=e^x$, $v(x)=x$ et $v'(x)=1$.

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x\times x-1\times e^x}{x^2} \qquad \boxed{f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}}$$

2) $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$

Pour tout x de]0;+∞[, $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=u'(x)=e^x, v(x)=x^2$ et $v'(x)=2x$.

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x\times x^2-2x\times e^x}{(x^2)^2} \qquad f'(x)=\frac{x(x-2)e^x}{x^4}$$

Donc $\boxed{f'(x)=\frac{(x-2)e^x}{x^3}}$

(on peut diviser le numérateur et le dénominateur par x qui est non nul sur l'intervalle $]0;+\infty[$.)

4) $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{x}}$.

Pour tout x de]0;+∞[, $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=u'(x)=e^x$, $v(x)=\sqrt{x}$ et $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x\times\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^x}{(\sqrt{x})^2} \qquad f'(x)=\frac{\frac{2\sqrt{x}\times e^x\times\sqrt{x}-e^x}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{(2x-1)e^x}{2x\sqrt{x}}}$$

5) $f(x)=e^x\times\sqrt{x}$

Pour tout x de]0;+∞[, $f(x)=u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=u'(x)=e^x$, $v(x)=\sqrt{x}$ et $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$$

$$f'(x)=e^x\times\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\times e^x \qquad f'(x)=\frac{(2\sqrt{x}\sqrt{x}+1)e^x}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{(2x+1)e^x}{2\sqrt{x}}}$$

3) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{e^x}$.

Pour tout x de]0;+∞[, $f'(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x)=\sqrt{x}$, $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v(x)=v'(x)=e^x$.

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\times e^x-e^x\times\sqrt{x}}{(e^x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{e^x-e^x\times\sqrt{x}\times2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{e^{2x}} \qquad \boxed{f'(x)=\frac{(1-2x)e^x}{2\sqrt{x}e^{2x}}}$$