Terminale S - Complexes - Exercices de calcul avec la notion de conjugué

Corrigés.

Exercice 1 : a) $\overline{-\mathrm{i}}=i$ Réponse : $\boxed{\mathrm{i}}$

b) $\overline{\mathrm{i}-1}=\overline{-1+i}=-1-i$ Réponse : $\boxed{-1-\mathrm{i}}$ ou $\boxed{-\mathrm{i}-1}$

c) $\overline{\mathrm{i}(3+\mathrm{i})}=\overline{3\mathrm{i}+i^2}=\overline{3\mathrm{i}-1}=\overline{-1+3\mathrm{i}}=-1-3\mathrm{i}$ Réponse : $\boxed{-1-3\,\mathrm{i}}$ ou $\boxed{-3\,\mathrm{i}-1}$

d) $\overline{-2\,\mathrm{i}-2}=\overline{-2-2\mathrm{i}}=-2+2\mathrm{i}$ Réponse : $\boxed{-2+2\,\mathrm{i}}$ ou $\boxed{2\,\mathrm{i}-2}$

e) $\overline{\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)}=-\frac{i}{2}$ Réponse : $\boxed{-\frac{\mathrm{i}}{2}}$

f) $\overline{\left(\frac{2}{\mathrm{i}}\right)}=\overline{\left(\frac{2\mathrm{i}}{i^2}\right)}=\overline{\left(\frac{2\mathrm{i}}{-1}\right)}=\overline{-2\mathrm{i}}=2\mathrm{i}$ Réponse : $\boxed{2\,\mathrm{i}}$

g) $\overline{\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)}=\frac{\overline{1+i}}{\overline{1-i}}=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2\mathrm{i}+i^2}{1-i^2}=\frac{1-2\mathrm{i}-1}{1+1}=-\frac{2\mathrm{i}}{2}=-i$ Réponse : $\boxed{-\mathrm{i}}$

h) $\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$ d'après ce qui précède. Donc $\overline{\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)}=\overline{-i}=\mathrm{i}$ Réponse : $\boxed{\mathrm{i}}$

i) $\overline{(5+2\,\mathrm{i})^3}=(\overline{5+2\mathrm{i}})^3=(5-2\mathrm{i})^3=5^3-3\times5^2\times2\mathrm{i}+3\times5\times(2\mathrm{i})^2-(2\,\mathrm{i})^3=125-150\mathrm{i}-60+8\mathrm{i}=65-142\mathrm{i}$

car $(a-b)^3=a^3-3\,a^2\,b+3\,ab^2-b^3$

Si on ne connaît pas la formule pour développer $(a-b)^3$, on procède comme suit :

$(5-2\,\mathrm{i})^3=(5-2\,\mathrm{i})^2\times(5-2\,\mathrm{i})=(25-20\,\mathrm{i}+4\,\mathrm{i}^2)\times(5-2\,\mathrm{i})=(25-20\,\mathrm{i}-4)\times(5-2\,\mathrm{i})=(21-20\,\mathrm{i})(5-2\,\mathrm{i})$

$(5-2\,\mathrm{i})^3=105-42\,\mathrm{i}-100\,\mathrm{i}+40\,\mathrm{i}^2=105-142\,\mathrm{i}-40=65-142\,\mathrm{i}$

Réponse : $\boxed{65-142\,\mathrm{i}}$

j) $\overline{\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}+1}\right)^4}=\left(\overline{\left(\frac{i}{i+1}\right)}\right)^4=\left(\frac{\bar{i}}{\overline{i+1}}\right)^4=\left(\frac{-i}{1-i}\right)^4=\left(\frac{-i(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^4=\left(\frac{-i-i^2}{1-i^2}\right)^4=\left(\frac{1-i}{1+1}\right)^4=\left(\frac{1-i}{2}\right)^4=\frac{(1-i)^4}{2^4}$

On peut utiliser la formule : $(a-b)^4=a^4-4\,a^3\,b+6\,a^2b^2-4\,ab^3+b^4$

$\overline{\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}+1}\right)^4}=\frac{1-4\,\mathrm{i}+6\,\mathrm{i}^2-4\,\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4}{16}=\frac{1-4\,\mathrm{i}-6+4\,\mathrm{i}+1}{16}=\frac{-4}{16}=-\frac{1}{4}$ Réponse : $\boxed{-\frac{1}{4}}$

Si on ne connaît pas cette formule, on calcule comme suit :

$\overline{\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}+1}\right)^4}=\frac{(1-\mathrm{i})^2\times(1-\mathrm{i})^2}{16}=\frac{(1-2\,\mathrm{i}+\mathrm{i}^2)(1-2\,\mathrm{i}+\mathrm{i}^2)}{16}=\frac{(1-2\,\mathrm{i}-1)(1-2\,\mathrm{i}-1)}{16}=\frac{(-2\,\mathrm{i})^2}{16}=\frac{4\,\mathrm{i}^2}{16}=-\frac{1}{4}$

Exercice 2 :

a) $Z=z+\overline{z}-3\mathrm{i}=2\mathrm{Re}(z)-3\mathrm{i}$ Z n'est pas réel. Il sera imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(z)=0$.

b) $\boxed{Z=z-\overline{z}+5\mathrm{i}}$ $Z=2i\,\mathrm{Im}(z)+5\mathrm{i}$ $Z=\mathrm{i}(2\,\mathrm{Im}(z)+5)$ Z est un imaginaire pur.

c) $\boxed{Z=z\overline{z}-z+\overline{z}}$ $z\overline{z}$ est un réel qui vaut $(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2$

$\overline{z}-z$ est aussi un imaginaire pur qui vaut $-2i\,\mathrm{Im}(z)$ car $x-iy-(x+iy)=-2iy$.

Donc $Z=(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2-2i\,\mathrm{Im}(z)$

Z sera un imaginaire pur si et seulement si $z=0$.

Z sera un réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z)=0$, c'est-à-dire si z est réel lui-même.

Dans les autres cas, Z n'est ni réel, ni imaginaire pur.

d) $\boxed{Z=\overline{z}(z+\mathrm{i})+\mathrm{i}(5\mathrm{i}-z)}$ $Z=z\overline{z}+\mathrm{i}\overline{z}+5\mathrm{i}^2-iz$ Posons $z=x+iy$ avec $x=\mathrm{Re}(z)$ et $y=\mathrm{Im}(z)$.

$Z=x^2+y^2+\mathrm{i}(x-iy)-5-\mathrm{i}(x+iy)$ $Z=x^2+y^2+ix-\mathrm{i}^2y-5-ix-\mathrm{i}^2y$

$Z=x^2+y^2+y-5+y$ $\boxed{Z=x^2+y^2+2y-5}$ Z est donc un réel.

Exercice 3 :

a) $\boxed{Z=-2+iz}$ $\overline{Z}=\overline{-2+iz}$ $\overline{Z}=\overline{-2}+\overline{\mathrm{i}}\,\overline{z}$ $\boxed{\overline{Z}=-2-\mathrm{i}\overline{z}}$

b) $\boxed{Z=(\mathrm{i}+z)(2-iz)}$ $\overline{Z}=\overline{(\mathrm{i}+z)(2-iz)}$ $\overline{Z}=(\overline{\mathrm{i}}+\overline{z})(\overline{2}-\overline{\mathrm{i}}\,\overline{z})$ $\boxed{\overline{Z}=(-\mathrm{i}+\overline{z})(2+\mathrm{i}\overline{z})}$

c) $\boxed{Z=(2iz+3)^2}$ $\overline{Z}=\overline{(2iz+3)^2}$ $\overline{Z}=\left(\overline{(2iz+3)}\right)^2$ $\overline{Z}=(\overline{2\mathrm{i}}\,\overline{z}+\overline{3})^2$

$\boxed{\overline{Z}=(-2\mathrm{i}\overline{z}+3)^2}$

d) $\boxed{Z=\dfrac{1+iz}{2z-\mathrm{i}}}$ $\overline{Z}=\overline{\left(\dfrac{1+iz}{2z-\mathrm{i}}\right)}$ $\overline{Z}=\dfrac{\overline{1+iz}}{\overline{2z-\mathrm{i}}}$ $\overline{Z}=\dfrac{\overline{1}+\overline{\mathrm{i}}\,\overline{z}}{\overline{2}\,\overline{z}-\overline{\mathrm{i}}}$ $\boxed{\overline{Z}=\dfrac{1-\mathrm{i}\overline{z}}{2\overline{z}+\mathrm{i}}}$

Exercice 4 : $z_1=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ et $z_2=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$.

z_1+z_2 est réel car z_1 et z_2 sont conjugués, car leurs numérateurs sont conjugués ainsi que leurs dénominateurs, et car $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Or la somme de deux complexes conjugués vaut deux fois leur partie réelle.

Exercice 5 : $\boxed{j=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ 1) $\boxed{\overline{\mathrm{j}}=-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$$\mathrm{j}^2=\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}\qquad\boxed{\mathrm{j}^2=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{1}{\mathrm{j}}=\frac{1}{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1\times\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{4}{4}}=\frac{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}$$

Donc $\boxed{\frac{1}{j}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Bilan : on a bien $\boxed{\bar{j}=j^2=\frac{1}{j}}$.

2) Montrer que $1+\bar{j}+(\bar{j})^2=0$ On a vu que $\boxed{\bar{j}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$(\bar{j})^2=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times i\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4} \qquad \boxed{(\bar{j})^2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Donc $\boxed{1+\bar{j}+(\bar{j})^2=1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=0}$

3) Soit $z\in\mathbb{C}$. Développons $(z-j)(z-\bar{j})$.

$$(z-j)(z-\bar{j})=\left[z-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\times\left[z-\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]=\left(z-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$(z-j)(z-\bar{j})=\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=z^2-2\times z\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{4}\right)=z^2-z+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$$

Donc $\boxed{(z-j)(z-\bar{j})=z^2-z+1}$ C.Q.F.D.

Exercice 6 :

(E_1) $\boxed{i\bar{z}=1}$ $\Leftrightarrow$ $\bar{z}=\frac{1}{i}$ $\Leftrightarrow$ $\bar{z}=\frac{i}{i^2}$ $\Leftrightarrow$ $\bar{z}=\frac{i}{-1}$ $\Leftrightarrow$ $\bar{z}=-i$ $\Leftrightarrow$ $z=i$ $\boxed{S=i}$

(E_2) $\boxed{i\bar{z}+z=0}$ Posons $z=x+iy$ où $x=\mathrm{Re}(z)$ et $y=\mathrm{Im}(z)$, puis résolvons dans $\mathbb{R}^2$ l'équation :
(E'_2) $i(x-iy)+(x+iy)=0$ $\Leftrightarrow$ $ix+y+x+iy=0$ $\Leftrightarrow$ $(x+y)+i(x+y)=0$ $\Leftrightarrow$ $x+y=0$ et $x+y=0$

Dans $\mathbb{R}^2$, tous les couples de la forme (x;-x) sont solutions de l'équation (E'_2).
On note $S=\{(x;-x), x\in\mathbb{R}\}$

Donc tout nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont opposées est solution de l'équation (E_2) : $\boxed{S=\{x-ix, x\in\mathbb{R}\}}$

(E_3) $\boxed{(3-2i)z=i-2}$

(E_3) $\Leftrightarrow$ $z=\frac{i-2}{3-2i}$

(E_3) $\Leftrightarrow$ $z=\frac{(i-2)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}$

(E_3) $\Leftrightarrow$ $z=\frac{3i+2i^2-6-4i}{9+4}$

(E_3) $\Leftrightarrow$ $z=\frac{-2-6-i}{13}$

(E_3) $\Leftrightarrow$ $z=-\frac{8}{13}-\frac{i}{13}$

$\boxed{S=\{-\frac{8}{13}-\frac{i}{13}\}}$

(E_4) $\boxed{(2+i)\bar{z}=3i}$ $\qquad (E_4) \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{3i(2-i)}{(2+i)(2-i)}$ $\qquad (E_4) \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{6}{5}i$

$(E_4) \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{3i}{2+i}$ $\qquad (E_4) \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{6i-3i^2}{4+1}$ $\qquad (E_4) \Leftrightarrow z=\dfrac{3}{5}-\dfrac{6}{5}i$ $\qquad \boxed{S=\{\dfrac{3}{5}-\dfrac{6}{5}i\}}$

(E_5) $\boxed{\bar{z}-2z=1+5i}$

Posons $z=x+iy$ où $x=\mathrm{Re}(z)$ et $y=\mathrm{Im}(z)$ et résolvons dans $\mathbb{R}^2$ l'équation (E'_5) :

(E'_5) $x-iy-2(x+iy)=1+5i \Leftrightarrow x-iy-2x-2iy=1+5i \Leftrightarrow -x-3iy=1+5i$

$(E'_5) \Leftrightarrow \begin{cases} -x=1 \\ -3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$ $\qquad S=\{\left(-1;-\dfrac{5}{3}\right)\}$ (ensemble des solutions de (E'_5))

$(E_5) \Leftrightarrow z=-1-\dfrac{5}{3}i$ $\qquad \boxed{S=\{-1-\dfrac{5}{3}i\}}$ $\qquad$ (Ensemble des solutions de (E_5))

(E_6) $\boxed{2i\bar{z}+3\bar{z}=5-2i} \Leftrightarrow (3+2i)\bar{z}=5-2i \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{5-2i}{3+2i} \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{(5-2i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$

$(E_6) \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{15-10i-6i+4i^2}{9-(2i)^2} \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{15-16i-4}{9+4} \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{11}{13}-\dfrac{16}{13}i \Leftrightarrow z=\dfrac{11}{13}+\dfrac{16}{13}i$

$\boxed{S=\{\dfrac{11}{13}+\dfrac{16}{13}i\}}$

(E_7) $\boxed{(1-i)\bar{z}=z}$ $\quad$ Posons $z=x+iy$ où $x=\mathrm{Re}(z)$ et $y=\mathrm{Im}(z)$ et résolvons dans $\mathbb{R}^2$ l'équation (E'_7) :

(E'_7) $(1-i)(x-iy)=x+iy \Leftrightarrow x-iy-ix+i^2y=x+iy \Leftrightarrow -iy-ix-y=iy \Leftrightarrow 0=y+2iy+ix$

$(E'_7) \Leftrightarrow 0=y+i(2y+x) \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ 2y+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$ L'ensemble des solutions de (E'_7) est : $S=\{(0;0)\}$

Donc $(E_7) \Leftrightarrow z=0$ $\qquad \boxed{S=\{0\}}$

(E_8) $\boxed{(3+i)\bar{z}=(1-5i)z}$ $\quad$ Posons $z=x+iy$ où $x=\mathrm{Re}(z)$ et $y=\mathrm{Im}(z)$ et résolvons dans $\mathbb{R}^2$:

(E'_8) $(3+i)(x-iy)=(1-5i)(x+iy) \Leftrightarrow 3x-3iy+ix-i^2y=x+iy-5ix-5i^2y$

$(E'_8) \Leftrightarrow 3x-3iy+ix+y=x+iy-5ix+5y \Leftrightarrow 2x-4y+6ix-4iy=0 \Leftrightarrow 2x-4y+i(6x-4y)=0$

$(E'_8) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y=0 \\ 6x-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=4y \\ 6x=4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ 6x=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ 4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$ $\qquad S=\{(0;0)\}$ pour (E'_8)

$(E_8) \Leftrightarrow z=0$ $\qquad \boxed{S=\{0\}}$

(E_9) $\boxed{i\bar{z}-2i=(2-i)z+1}$ $\qquad$ Posons $z=x+iy$ où $x=\mathrm{Re}(z)$ et $y=\mathrm{Im}(z)$ et résolvons dans $\mathbb{R}^2$:

(E'_9) $i(x-iy)-2i=(2-i)(x+iy)+1 \Leftrightarrow ix-i^2y-2i=2x+2iy-ix-i^2y+1$

$(E'_9) \Leftrightarrow \ \mathrm{i}(x-2)=(2x+1)+\mathrm{i}(2y-x) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 0=2x+1 \\ x-2=2y-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ 2x-2=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ x-1=y \end{cases}$

$(E'_9) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2}-1=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ $\quad S=\left\{\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)\right\}$ (Ensemble des solutions de (E'_9))

$(E_9) \Leftrightarrow z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$ $\quad \boxed{S=\left\{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right\}}$

(E_{10}) $\boxed{(3-2\mathrm{i})\bar{z}-2iz=3-2\mathrm{i}}$ Posons $z=x+iy$ où $x=\mathrm{Re}(z)$ et $y=\mathrm{Im}(z)$

Et résolvons dans $\mathbb{R}^2$ l'équation (E'_{10}) :

$(E'_{10}) \quad (3-2\mathrm{i})(x-iy)-2\mathrm{i}(x+iy)=3-2\mathrm{i} \ \Leftrightarrow \ 3x-3iy-2ix+2\mathrm{i}^2y-2ix-2\mathrm{i}^2y=3-2\mathrm{i}$

$(E'_{10}) \Leftrightarrow 3x+\mathrm{i}(-3y-4x)=3-2\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=3 \\ -3y-4x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ -3y-4=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ -3y=2 \end{cases}$

$(E'_{10}) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$ Ensemble des solutions de (E'_{10}) : $S=\left\{\left(1;-\dfrac{2}{3}\right)\right\}$

$(E_{10}) \Leftrightarrow z=1-\dfrac{2}{3}\mathrm{i}$ Ensemble des solutions de (E_{10}) : $\boxed{S=\left\{1-\dfrac{2}{3}\mathrm{i}\right\}}$

(E_{11}) $\boxed{\bar{z}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}z}$ <u>Remarque</u> : on a vu à l'exercice 1 que $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$

En effet : $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{1+2\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{2}=\dfrac{2\mathrm{i}}{2}=\mathrm{i}$

Donc $(E_{11}) \Leftrightarrow \bar{z}=iz$ Posons $z=x+iy$ où $x=\mathrm{Re}(z)$ et $y=\mathrm{Im}(z)$ et résolvons dans $\mathbb{R}^2$:

$(E'_{11}) \quad x-iy=\mathrm{i}(x+iy) \ \Leftrightarrow \ x-iy=ix+\mathrm{i}^2y \ \Leftrightarrow \ x-iy=-y+ix \ \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ -y=x \end{cases}$

Peu importe la valeur de x , mais x et y doivent être opposés.

L'ensemble des solutions de (E'_{11}) est donc : $S=\{(x;-x), x\in\mathbb{R}\}$

Tout complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont opposés est donc solution de (E_{11}) :

$$\boxed{S=\{x-ix, x\in\mathbb{R}\}}$$

(E_{12}) $\boxed{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})\overline{z}=(1-\mathrm{i}\sqrt{3})z}$ Posons $z=x+iy$ où $x=\mathrm{Re}(z)$ et $y=\mathrm{Im}(z)$ et résolvons dans $\mathbb{R}^2$:

(E'_{12}) $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})(x-iy)=(1-\mathrm{i}\sqrt{3})(x+iy)$ $\Leftrightarrow$ $x-\mathrm{i}^2 y\sqrt{3}+ix\sqrt{3}-iy=x-\mathrm{i}^2 y\sqrt{3}+iy-ix\sqrt{3}$

(E'_{12}) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{i}(x\sqrt{3}-y)=\mathrm{i}(y-x\sqrt{3})$ $\Leftrightarrow$ $x\sqrt{3}-y=y-x\sqrt{3}$ (car i $\neq$ 0)

(E'_{12}) $\Leftrightarrow$ $2x\sqrt{3}=2y$ $\Leftrightarrow$ $x\sqrt{3}=y$

L'ensemble des solutions de (E'_{12}) est donc $S=\{(x;x\sqrt{3}), x\in\mathbb{R}\}$.

Tout complexe dont la partie imaginaire est égale à la partie réelle multipliée par $\sqrt{3}$ est solution de (E_{12}) .

Donc $\boxed{S=\{x+ix\sqrt{3}, x\in\mathbb{R}\}}$