Exercice 1 : Déterminer le conjugué de chacun des nombres complexes suivants (donner le résultat sous forme algébrique) :

a) $-\mathrm{i}$ b) $\mathrm{i}-1$ c) $\mathrm{i}(3+\mathrm{i})$ d) $-2\mathrm{i}-2$ e) $\frac{\mathrm{i}}{2}$ f) $\frac{2}{\mathrm{i}}$

g) $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ h) $\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ i) $(5+2\mathrm{i})^3$ j) $\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}+1}\right)^4$

Les formules $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ et $(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$ peuvent être utilisées, mais ce n'est pas obligatoire.

Exercice 2 : z est un nombre complexe. Préciser, dans chaque cas, si Z est réel, imaginaire pur, ou ni l'un ni l'autre.

a) $Z=z+\bar{z}-3\mathrm{i}$ b) $Z=z-\bar{z}+5\mathrm{i}$ c) $Z=z\bar{z}-z+\bar{z}$ d) $Z=\bar{z}(z+\mathrm{i})+\mathrm{i}(5\mathrm{i}-z)$

Exercice 3 : z est un nombre complexe. Dans chaque cas, exprimer $\bar{Z}$ en fonction de $\bar{z}$.

a) $Z=-2+iz$ b) $Z=(\mathrm{i}+z)(2-iz)$ c) $Z=(2iz+3)^2$ d) $Z=\frac{1+iz}{2z-\mathrm{i}}$

Exercice 4 : on note $z_1=\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ et $z_2=\frac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$. Pourquoi peut-on affirmer sans calcul que z_1+z_2 est un nombre réel ?

Exercice 5 : Soit j le nombre $-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Montrer que $\bar{\mathrm{j}}=\mathrm{j}^2=\frac{1}{\mathrm{j}}$

2) Montrer que $1+\bar{\mathrm{j}}+(\bar{\mathrm{j}})^2=0$

3) Montrer que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $z^2+z+1=(z-\mathrm{j})(z-\bar{\mathrm{j}})$

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

(E_1) $\mathrm{i}\bar{z}=1$ (E_2) $\mathrm{i}\bar{z}+z=0$ (E_3) $(3-2\mathrm{i})z=\mathrm{i}-2$

(E_4) $(2+\mathrm{i})\bar{z}=3\mathrm{i}$ (E_5) $\bar{z}-2z=1+5\mathrm{i}$ (E_6) $2\mathrm{i}\bar{z}+3\bar{z}=5-2\mathrm{i}$

(E_7) $(1-\mathrm{i})\bar{z}=z$ (E_8) $(3+\mathrm{i})\bar{z}=(1-5\mathrm{i})z$ (E_9) $\mathrm{i}\bar{z}-2\mathrm{i}=(2-\mathrm{i})z+1$

(E_{10}) $(3-2\mathrm{i})\bar{z}-2iz=3-2\mathrm{i}$ (E_{11}) $\bar{z}=\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}z$ (E_{12}) $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})\bar{z}=(1-\mathrm{i}\sqrt{3})z$