Exercice 1 : Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 2 : Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = (1+2+\ldots+n)^2$

Exercice 3 : Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$1\times 2 + 2\times 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Exercice 4 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n^2}$. 1) Calculer les 5 premiers termes de cette suite.

2) Émettre une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n.

3) Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 5 : Même consigne que l'exercice 4 avec $u_{n+1}=\sqrt{4+u_n^2}$

Exercice 6 : On définit la suite (u_n) par $u_1=1$ et, pour tout $n\geqslant 1$, $u_{n+1}=-2u_n+9$.
Montrer par récurrence que, pour tout $n\geqslant 1$, $u_n=(-2)^n+3$

Exercice 7 (d'après BAC) : Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$u_0=3$ et, pour tout entier $n\geqslant 0$, $u_{n+1}=2u_n-1$.

$v_0=1$ et, pour tout entier $n\geqslant 0$, $v_{n+1}=2v_n+3$

1) Montrer par récurrence que, pour tout $n\geqslant 0$: a) $u_n=2^{n+1}+1$ b) $2u_n-v_n=5$

2) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

Exercice 8 : On utilise la notation suivante : pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$, $n!=1\times 2\times 3\times\ldots\times n$

$n!$ se lit « factorielle n ».

1) Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1+2\times 2!+3\times 3!+\ldots+n\times n!=(n+1)!-1$

2) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n!\geqslant 2^{n+1}$

Exercice 9 :On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$. Prouver par récurrence :

1) Que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs

2) Que la suite est croissante.

3) Que, pour tout entier naturel n, $u_n<2$

Exercice 10 : Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier.
« Si la suite (v_n) est définie par : $v_0=0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1}=v_n+2n+2$, alors $v_n=n(n+1)$ pour tout entier $n\geqslant 0$. »

Exercice 11 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n+2n+1$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n^2$.

Exercice 12 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0=2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+5}$.
Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2 \leqslant u_n < 3$.

Exercice 13 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n^2-u_n+1$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n < 1$.

Exercice 14 : Soit (q_n) la suite définie par $q_1=\frac{1}{3}$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $q_{n+1}=\frac{n+1}{3n}q_n$.

Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $q_n=\frac{n}{3^n}$.

Exercice 15 : On place n points distincts sur un cercle, $n \geqslant 2$, et on note S_n le nombre de segments qu'on peut tracer ayant pour extrémités 2 de ces points.
1) Déterminer S_2, S_3, S_4 et S_5.
2) Conjecturer l'expression de S_n en fonction de n.
3) Démontrer par récurrence la conjecture de la question 2.

Exercice 16 : Pour tout entier $n \geqslant 4$, on note d_n le nombre de diagonales d'un polygone convexe[1] à n côtés.
1) Déterminer graphiquement d_4, d_5, d_6 et d_7.
2) Un exemple : tracer un pentagone ABCDE. Ajouter un point F à l'extérieur du pentagone. Quelles sont les diagonales de ABCDEF qui ne sont pas diagonales de ABCDE ?
3) Établir une relation entre d_n et d_{n+1}.
4) Montrer que, pour tout $n \geqslant 4$, $d_n=\frac{n(n-3)}{2}$.

Exercice 17 : Soit $u_0=2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$.
Montrer que, pour tout entier naturel $\mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Exercice 18 : On définit la suite (u_n) par $u_0=1$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1}=2u_n-n+1$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

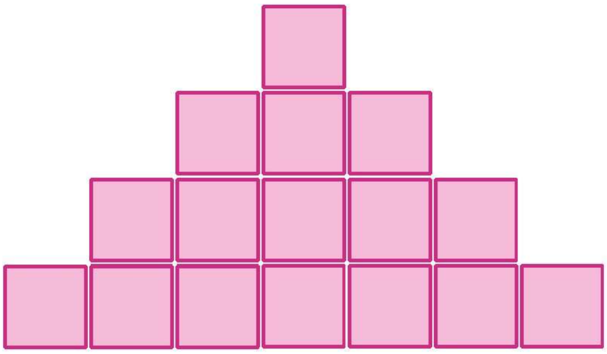
Exercice 19 (d'après BAC) : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=1$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1}=u_n+2n+3$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n^2$.

1 On dit qu'une figure est convexe lorsque, quel que soit le couple de points choisi à l'intérieur ou sur le pourtour de cette figure, le segment qui relie ces 2 points soit entièrement inclus dans la figure.

Exercice 20 : 1) Comparer 2^n et n^2 pour différentes valeurs de n.
2) Résoudre dans ℕ l'inéquation $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.
3) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.
4) Cette inégalité est-elle vraie pour $n<4$?

Exercice 21 (d'après l'examen du Baccalauréat allemand) : Les 7 premiers termes d'une suite sont : $a_0=1$, $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=7$, $a_4=13$, $a_5=21$ et $a_6=31$.
1) Trouver une formule de récurrence pour définir la suite (a_n).
2) Vérifiez si la formule trouvée au 1) satisfait à la condition : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n=n^2-n+1$.

Exercice 22 : On note u_n le nombre de cubes nécessaires pour construire une pyramide à n étages selon le modèle ci-contre.
1) Déterminer les 7 premiers termes de cette suite.
2) Émettre une conjecture sur la formule de u_n en fonction de n.
3) Démontrer par récurrence cette conjecture.



Exercice 23 : Démontrer par récurrence que, $\forall\ a \in \mathbb{R}_+$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

Exercice 24 : Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 6^n-1 est divisible par 5.

Exercice 25 : Les suites (x_n) et (y_n) sont définies par : $x_0=10$, $y_0=15$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1}=x_n+4y_n$ et $y_{n+1}=y_n+9x_n$.
1) Calculer x_1 et y_1.
2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier w_n tel que : $x_n=10w_n$ et $y_n=15w_n$.
3) Définir la suite (w_n) et exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n en fonction de n.
4) En déduire les valeurs de x_5 et y_5.

Exercice 26 : Soient a et b deux nombres réels tels que $0<b\leqslant a$. Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0=a$, $v_0=b$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=\dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$.
1) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0<v_n\leqslant u_n$.
2) a) En déduire que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1}-v_{n+1}\leqslant\dfrac{u_n-v_n}{2}$.

c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n-v_n\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^n(u_0-v_0)$

3) Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n=u_nv_n$. Montrer que (w_n) est constante.