Exercice 1: Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

1) $\sum_{i=0}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 2) $\sum_{i:0}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Exercice 2 : Montrer que, pour tout entier naturel n :

1) $4^n - 1$ est divisible par 3. 2) $2^{n+4} + 3^{3n+2}$ est divisible par 5. 3) $3^{6n+2} - 2$ est divisible par 7.

Exercice 3 : Montrer que, pour tout entier naturel n :

1) $n^3 - n$ est divisible par 3. 2) $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9. 3) $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11.

Exercice 4 : On considère les propositions P_n et Q_n suivantes :

P_n : « 3 divise $4^n - 1$ » Q_n : « 3 divise $4^n + 1$ »

1) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : « Si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie ».

2) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : « Si Q_n est vraie, alors Q_{n+1} est vraie. »

3) Vérifier que P_0 est vraie. Que peut-on en déduire ?

4) Qu'en est-il de Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 ? Que semble-t-il légitime de conjecturer ?

5) Soient a et b deux entiers multiples de 3. Montrer que $a - b$ est aussi multiple de 3.

6) Montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est fausse.

Exercice 5 : On considère la proposition P_n suivante : P_n : « 9 divise $10^n + 1$ ».

1) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : Si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.

2) Qu'en est-il de P_0, P_1, P_2 et P_3 ? Que semble-t-il légitime de conjecturer ?

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 9 divise $10^n - 1$.

4) En déduire à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n est fausse.

Exercice 6 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \frac{2}{5} u_n + 3$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$

Exercice 7 : On considère la suite (u_n) définie sur ℕ par : $u_0=0$ et $u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+3$.

Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout entier naturel n :

$$u_n=5\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right).$$

Exercice 8 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_1=5$ et pour $n\geqslant 2$, $u_n=2u_{n-1}-n$.

Démontrer, pour tout entier naturel non nul, que : $u_n=2(2^{n-1}+1)+n$

Exercice 9 : On considère la suite (u_n) définie sur ℕ par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=3u_n+n+1$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n=\frac{11}{4}\times 3^n-\frac{3}{4}-\frac{n}{2}$.

Exercice 10 : On considère la suite (u_n) définie sur ℕ par : $u_0=\frac{1}{4}$ et $u_{n+1}=5u_n-1$.

1) Calculer les 3 premiers termes de la suite (u_n) .

2) Conjecturer son expression explicite. 3) Démontrer la conjecture.

Exercice 11 : On considère la suite (u_n) définie sur ℕ par :

$$u_0=0 \text{ et } u_{n+1}=u_n+2n+1 .$$

On souhaite faire calculer les premiers termes de la suite à un tableur, afin de conjecturer u_n en fonction de n pour $n \in$ ℕ.

À partir d'un logiciel de type tableur, on réalise la feuille de calculs ci-contre :

	A	B
1	n	Un
2	0	0
3	1	=
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	

1) Quelle formule à étirer peut-on écrire dans la cellule **B3** afin d'obtenir, en recopiant vers le bas, les termes de la suite (u_n) ?

2) Recopier alors cette feuille de calculs complétée par les valeurs. Quelle est la formule en **B10** ?

3) En déduire une conjecture de la formule de u_n en fonction de n, entier naturel, et la démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 12 : On considère la suite (u_n) définie sur ℕ* par $u_1=u_2=1$ et $u_{n+2}=-3u_{n+1}-2u_n$.

Démontrer que, pour tout $n \in$ ℕ* : $u_n=(-2)^n-3\times(-1)^n$.

Exercice 13 : On considère la suite (u_n) définie sur ℕ par :

$$u_0=u_1=4 \text{ et } u_{n+2}=\frac{5}{2}u_{n+1}-\frac{3}{2}u_n .$$

À partir d'un logiciel de type tableur, on réalise la feuille de calculs ci-contre :

	A	B
1	n	Un
2	0	4
3	1	4
4	2	=
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	

1) Quelle formule à étirer peut-on écrire dans la cellule B4 afin d'obtenir, en recopiant vers le bas, les termes de la suite (u_n) ?

Quelle conjecture peut-on alors faire de l'expression de u_n en fonction de n ?

2) Démontrer cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 14 : **Nombre d'or et suite de Fibonacci.**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=u_1=1$ et, pour tout entier $n\geqslant 2$, $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$. On pose $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1) Vérifier que $\phi^2=\phi+1$.

2) En déduire une expression de ϕ^3, ϕ^4 et ϕ^5 de la forme $a\phi+b$, avec a et b deux entiers.

3) Déduire des deux questions précédentes une conjecture de l'expression de ϕ^n sous la forme $a\phi+b$. Démontrer alors cette conjecture avec n un entier naturel quelconque.

Note : Cette conjecture doit utiliser la définition par récurrence de la suite (u_n)

4) À l'aide du résultat de la question *3*, on a conçu dans *Algobox* l'algorithme ci-contre, dans le but de fournir les valeurs de a et de b dans la décomposition de ϕ^n sous la forme $a\phi+b$ pour n entier naturel quelconque.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Entrer votre valeur de n :"
  LIRE n
  SI (n==0) ALORS
    DEBUT_SI
    a PREND_LA_VALEUR 0
    b PREND_LA_VALEUR 1
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      SI (n==1) ALORS
        DEBUT_SI
        a PREND_LA_VALEUR 1
        b PREND_LA_VALEUR 0
        FIN_SI
        SINON
          DEBUT_SINON
          a PREND_LA_VALEUR 1
          b PREND_LA_VALEUR 1
          SI (n>=3) ALORS
            DEBUT_SI
            POUR i ALLANT_DE 1 A n-2
              DEBUT_POUR
              c PREND_LA_VALEUR a
              a PREND_LA_VALEUR
              b PREND_LA_VALEUR
              FIN_POUR
            FIN_SI
          FIN_SINON
      FIN_SINON
  AFFICHER "a="
  AFFICHER a
  AFFICHER "b="
  AFFICHER b
FIN_ALGORITHME
```

Reproduire cet algorithme après avoir complété les lignes « cachées » et l'exécuter. En déduire ϕ^{35}.

Exercice 15 : On définit, de façon récurrente, la factorielle d'un entier naturel *n* que l'on note $n!$ de la façon suivante :

- $0! = 1$
- Pour $n \geqslant 0$, $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1 : $n! = 1 \times \ldots \times n$.

Exercice 16 : On souhaite comparer les croissances, pour *n* entier naturel, des progressions de 3^n et $n!$.

1) Comparer 3^n et $n!$ pour n allant de 0 à 7.

2) À votre avis, qui sera le plus grand entre 3^n et $n!$ pour $n \geq 7$?

3) Démontrer par récurrence votre conjecture de la question *2*.

Exercice 17 : Démontrer par récurrence que, pour tout n ∈ ℕ*, $a^n - b^n = (a-b) \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i$.

Aide : pour l'étape d'hérédité, on pourra utiliser par exemple le fait que $a^{n+1} - b^{n+1} = a \times a^n - b \times b^n$, puis que $a = (a-b) + b$, ce qui permettra d'utiliser l'hypothèse de récurrence.

Exercice 18 : On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel *n* par :

- $t_0 = 0$
- $t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ pour tout *n* ∈ ℕ.

La proposition « Pour tout entier naturel n, $t_n = \dfrac{n}{n+1}$ » est-elle vraie ou fausse ?

(d'après Bac 2010)

Exercice 19 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 6$ et, pour tout n ∈ ℕ* : $u_{n+1} = 6u_n - 9u_{n-1}$.

1) Calculer u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6.

2) Conjecturer la progression[1] de la suite (u_n).

3) Démontrer la propriété conjecturée, et en déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

1 Est-ce une suite arithmétique ? Géométrique ? Quelle est sa raison ?