Terminale S - 19 exercices sur le raisonnement par récurrence - Corrigés.

Exercice 1 : 1) On souhaite montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

* Rang 0 : $\sum_{i=0}^{0} i^2 = 0^2 = 0$ et $\frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0$ } pour $n=0$, on a bien $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

* HRn : On suppose qu'il existe un rang $n \geq 0$ pour lequel on a : $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

* Montrons qu'alors : $\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$

soit $\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \boxed{\sum_{i=0}^{n} i^2} + (n+1)^2$$

Or, on sait d'après HRn que $\boxed{\sum_{i=0}^{n} i^2} = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

On a donc : $\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + \frac{(n+1)^2 \times 6}{6}$

factorisation : $ka + kb = k(a+b)$

$$= \frac{(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6}$$

Soit $\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

On peut remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6$$
$$= 2n^2 + 7n + 6$$

On a donc : $\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ C.Q.F.D

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a bien :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

2) On souhaite montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

* Rang $n=0$: $\sum_{i=0}^{0} i^3 = 0^3 = 0$ et $\left[\frac{0(0+1)}{2}\right]^2 = \frac{0\times 1}{2} = 0$ } On a bien $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

* HRn : On suppose qu'il existe un rang $n \geq 0$ auquel on a : $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

On remplace n par n+1 dans la formule.

* Montrons qu'alors : $\sum_{i=0}^{n+1} i^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$

Suite de l'exercice 1 - 2) D'après HRn :

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4}$$ ← réduction au même dénominateur

Car la puissance se distribue sur la multiplication et sur la division

$$= \frac{(n+1)^2\left[n^2 + 4(n+1)\right]}{4}$$ en factorisant par $(n+1)^2$

$$= \frac{(n+1)^2\left[n^2 + 4n + 4\right]}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4}$$ d'après la 1ère identité remarquable

$$= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$ C.Q.F.D car la puissance se distribue sur la multiplication et sur la division.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Exercice 2 : 1) Prouvons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par n.

* Rang $n = 0$: $4^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ $\quad 0 = 0 \times 3$
Il est vrai que $4^n - 1$ est divisible par 3.

* HRn : On suppose qu'il existe un rang $n \geqslant 0$ auquel $4^n - 1$ est divisible par 3, ce qui se traduit par : il existe un entier k_n tel que $4^n - 1 = 3k_n$

* Nous voulons maintenant prouver que $4^{n+1} - 1$ est lui aussi divisible par 3.

$$4^{n+1} - 1 = 4^n \times 4 - 1$$
$$= (3k_n + 1) \times 4 - 1$$ d'après l'hypothèse de récurrence car $4^n - 1 = 3k_n \iff 4^n = 3k_n + 1$

$$4^{n+1} - 1 = 12k_n + 4 - 1$$
$$= 12k_n + 3$$
$$= 3(4k_n + 1)$$

qui est un entier que nous pouvons nommer k_{n+1}.

Il existe un entier $k_{n+1} = 4k_n + 1$ tel que $4^{n+1} - 1 = 3k_{n+1}$

$4^{n+1} - 1$ est donc divisible par 3, C.Q.F.D

Conclusion : Pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Suite de l'exercice 2 : 2) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2^{n+4} + 3^{3n+2}$ est divisible par 5.

* Rang $n=0$: $2^{n+4} + 3^{3n+2} = 2^{0+4} + 3^{3\times 0+2}$
$= 2^4 + 3^2$
$= 16 + 9$
$= 25$
$= 5 \times 5$

→ Il est vrai qu'au rang $n=0$, $2^{n+4} + 3^{3n+2}$ est divisible par 5.

* HRn : On suppose qu'il existe un rang $n \geqslant 0$ auquel $2^{n+4} + 3^{3n+2}$ est divisible par 5, c'est-à-dire qu'il existe un entier k_n tel que $\boxed{2^{n+4} + 3^{3n+2} = 5k_n}$

* Montrons qu'alors, $2^{n+1+4} + 3^{3(n+1)+2}$ est aussi divisible par 5 !

$2^{n+1+4} + 3^{3(n+1)+2} = 2^{n+5} + 3^{3n+5}$
$= 2 \times 2^{n+4} + 3^{3n+5}$

d'après HR_n, $2^{n+4} = 5k_n - 3^{3n+2}$ où $k_n \in \mathbb{Z}$

Donc $2^{n+1+4} + 3^{3(n+1)+2} = 2(5k_n - 3^{3n+2}) + 3^{3n+5}$
$= 10k_n - 2 \times 3^{3n+2} + 3^3 \times 3^{3n+2}$
$= 5 \times 2k_n + (-2 + 3^3) 3^{3n+2}$
$2^{n+1+4} + 3^{3(n+1)+2} = \underline{5} \times 2k_n + 25 \times 3^{3n+2}$
$= 5(\underbrace{2k_n + 5 \times 3^{3n+2}}_{\text{qui est un entier qu'on peut nommer } k_{n+1}})$

$2^{n+1+4} + 3^{3(n+1)+2}$ est donc un multiple de 5 C.Q.F.D.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{n+4} + 3^{3n+2}$ est un multiple de 5.

3) On souhaite montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{6n+2} - 2$ est divisible par 7.

* Rang $n=0$: $3^{6n+2} - 2 = 3^{6\times 0+2} - 2$
$= 3^2 - 2$
$= 9 - 2$
$= 7$
$= 7 \times 1$ avec $1 \in \mathbb{Z}$

Il est vrai que 3^{6n+2} est un multiple de 7.

* HRn : On suppose qu'il existe un rang $n \geqslant 0$ pour lequel 3^{6n+2} est multiple de 7, c'est-à-dire qu'il existe un entier k_n tel que $3^{6n+2} = 7k_n$

* On veut montrer qu'alors, $3^{6(n+1)+2}$ est un multiple de 7, c'est-à-dire qu'il existe un entier k_{n+1} tel que $3^{6(n+1)+2} = 7k_{n+1}$

Suite de l'exercice 2 question 3 :

$3^{6(n+1)+2} = 3^{6n+6+2} = \underbrace{3^{6n+2}}_{7k_n \text{ d'après HR}_n} \times 3^6$ (rappel : $a^n \times a^m = a^{n+m}$)

$= 7\underbrace{k_n \times 3^6}_{\text{entier } k_{n+1}}$

Il existe donc bien un entier $k_{n+1} = k_n \times 3^6$ tel que $3^{6(n+1)+2} = 7k_{n+1}$

Donc $3^{6(n+1)+2}$ est bien un multiple de 7.

Conclusion : pour tout entier n, 3^{6n+2} est un multiple de 7.

Exercice 3 : 1) On cherche à prouver que, pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est divisible par 3.

* Rang $n = 0$: $n^3 - n = 0^3 - 0 = 0 = 0 \times 3$
→ $n^3 - n$ est bien un multiple de 3.

* HR$_n$: On suppose qu'il existe un rang $n \geqslant 0$ tel que $n^3 - n$ soit un multiple de 3.

$HR_n \iff \exists\, n \geqslant 0$ et $\exists\, k_n \in \mathbb{Z}$ tels que $n^3 - n = 3k_n$

* Montrons qu'alors, $(n+1)^3 - (n+1)$ est lui aussi divisible par 3, c'est-à-dire qu'il existe un entier k_{n+1} tel que $(n+1)^3 - (n+1) = 3k_{n+1}$

$(n+1)^3 - (n+1) = \overbrace{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}^{\text{formule du binôme de Newton}} - n - 1$

$= \underbrace{n^3 - n}_{3k_n} + 3(n^2 + n)$

$= 3k_n + 3(n^2 + n)$ d'après HR$_n$

$(n+1)^3 - (n+1) = 3(\underbrace{k_n + n^2 + n}_{\text{qui est un entier qu'on peut nommer } k_{n+1}})$

$(n+1)^3 - (n+1)$ est donc bien un multiple de 3.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est un multiple de 3.

Remarque : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n = n(n^2 - 1)$
$= n(n+1)(n-1)$

Il s'agit du produit de 3 entiers consécutifs, or l'un d'eux est nécessairement un multiple de 3, donc $n^3 - n$ l'est aussi → On pourrait faire une démonstration directe et plus courte.

2) On cherche à prouver que, pour tout entier naturel n, $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9.

* Rang $n = 0$: $4^n - 1 - 3n = 4^0 - 1 - 3 \times 0$
$= 1 - 1 - 0$
$= 0$
$= 0 \times 9$
→ $4^n - 1 - 3n$ est bien divisible par 9.

* HR$_n$: On suppose qu'il existe un rang $n \geqslant 0$ auquel $4^n - 1 - 3n$ est multiple de 9, soit qu'il existe un entier k_n tel que $4^n - 1 - 3n = k_n \times 9$

* Montrons qu'alors, $4^{n+1} - 1 - 3(n+1)$ est aussi multiple de 9.

Suite de l'exercice 3, question 2 : D'après HRm, il existe un entier k_m tel que :

$4^m - 1 - 3m = 9k_m \iff 4^m = 9k_m + 1 + 3m$.

Donc $4^{m+1} - 1 - 3(m+1) = 4^m \times 4 - 1 - 3m - 3$
$= (9k_m + 1 + 3m) \times 4 - 3m - 4$
$= 36k_m + 4 + 12m - 3m - 4$
$= 36k_m + 9m$
$= 9(4k_m + m)$

qui est un entier que l'on peut nommer k_{m+1}

$4^{m+1} - 1 - 3(m+1)$ est donc un multiple de 9.

Conclusion : Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $4^m - 1 - 3m$ est divisible par 9.

3) On veut montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $7 \times 3^{5m} + 4$ est divisible par 11.

* Au rang $m = 0$: $7 \times 3^{5\times 0} + 4 = 7 \times 3^0 + 4$
$= 7 \times 1 + 4$
$= 7 + 4$
$= 11$
$= 11 \times 1$

→ Il est vrai que, pour $m = 0$, $7 \times 3^{5m} + 4$ est un multiple de 11.

* HRm : On suppose qu'il existe un rang $m \geqslant 0$ auquel $7 \times 3^{5m} + 4$ est un multiple de 11, soit qu'il existe un entier k_m tel que $7 \times 3^{5m} + 4 = 11k_m$.

* Montrons qu'alors, $7 \times 3^{5(m+1)} + 4$ est aussi un multiple de 11.

D'après HRm, il existe un entier k_m tel que :

$7 \times 3^{5m} + 4 = 11k_m$ soit $7 \times 3^{5m} = 11k_m - 4$

Donc $7 \times 3^{5(m+1)} + 4 = 7 \times 3^{5m+5} + 4$
$= 7 \times 3^{5m} \times 3^5 + 4$ car $a^m \times a^n = a^{m+n}$
$= (11k_m - 4) \times 3^5 + 4$
$= (11k_m - 4) \times 243 + 4$
$= 11 \times 243 k_m - 972 + 4$
$= 11 \times 243 k_m - 968$
$= 11 \times 243 k_m - 11 \times 88$
$= 11 \times (243k_m - 88)$

Remarquons que je n'ai pas pris la peine d'exécuter 11×243 sachant que je devrais ensuite re-factoriser par 11.

qui est un entier que l'on peut nommer k_{m+1}

Donc $7 \times 3^{5(m+1)} + 4$ est bien un multiple de 11.

Conclusion : Pour tout entier naturel m, $7 \times 3^{5m} + 4$ est divisible par 11.

Exercice 4 : 1) P_m : « 3 divise $4^m - 1$ »

Supposons que P_m soit vraie pour un certain rang m. Cela signifie qu'il existe un entier k_m tel que $4^m - 1 = 3k_m$ soit $4^m = 3k_m + 1$.

Suite de l'exercice 4, question 1.

On a alors : $4^{n+1} - 1 = 4^n \times 4 - 1$
$= (3k_n + 1) \times 4 - 1$
$= 12k_n + 4 - 1$
$= 12k_n + 3$
$= 3(4k_n + 3)$
qui est un entier qu'on peut nommer k_{n+1}

Si P_n est vraie, $4^{n+1} - 1$ est aussi un multiple de 3, donc P_{n+1} est vraie aussi. C.Q.F.D

2) Q_n : « 3 divise $4^n + 1$ » $\Leftrightarrow$ il existe un entier l_n tel que $4^n + 1 = 3l_n$ soit $4^n = 3l_n - 1$

Donc $4^{n+1} + 1 = 4^n \times 4 + 1$
$= (3l_n - 1) \times 4 + 1$
$= 12l_n - 4 + 1$
$= 12l_n - 3$
$= 3(4l_n - 1)$
qui est un entier que l'on peut nommer l_{n+1}

$4^{n+1} + 1$ est donc aussi divisible par 3.

On vient de montrer que si Q_n est vraie, alors Q_{n+1} l'est aussi ... mais pas que Q_n est vraie.

3) P_0 : « 3 divise $4^0 - 1$ »

$4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 0 \times 3$ → Ainsi, P_0 est vraie.

On sait que :
* P_0 est vraie (initialisation)
* et que si P_n est vraie (HR_n)
* alors P_{n+1} est vraie (hérédité)

On peut en conclure que, pour tout entier n, P_n est vraie.

4) Q_0 : « 3 divise $4^0 + 1$ »
$4^0 + 1 = 1 + 1 = 2$
3 ne divise pas 2 → Q_0 est fausse.

Q_1 : « 3 divise $4^1 + 1$ »
$4^1 + 1 = 5$
3 ne divise pas 5 → Q_1 est fausse.

Q_2 : « 3 divise $4^2 + 1$ »
$4^2 + 1 = 16 + 1 = 17$
3 ne divise pas 17 → Q_2 est fausse

Q_3 : « 3 divise $4^3 + 1$ »
$4^3 + 1 = 64 + 1 = 65$
$6 + 5 = 11$ donc 3 ne divise pas 65 → Q_3 est fausse.

Q_4 : « 3 divise $4^4 + 1$ »
$4^4 + 1 = 256 + 1 = 257$
$2 + 5 + 7 = 14$ donc 3 ne divise pas 257
→ Q_4 est fausse

Il semblerait que Q_n soit fausse ... peut-être pour tout entier n ?

5) Si a et b sont 2 entiers multiples de 3, cela signifie qu'il existe 2 entiers a' et b' tels que $a = 3a'$ et $b = 3b'$

Suite de l'exercice 4, question 5. On a alors : $a-b = 3a' - 3b'$
$= 3(a'-b')$, avec $a'-b'$ qui est un entier, puisqu'il est la différence de 2 entiers.

$a-b$ est donc un multiple de 3.

6) Supposons qu'il existe un entier n_0 pour lequel Q_{n_0} soit vraie. On aurait alors $4^{n_0}+1$ multiple de 3.

Comme P_n est vraie pour tout n, elle l'est en particulier pour n_0. On a donc $4^{n_0}-1$ multiple de 3.

D'après la question 5), leur différence $(4^{n_0}+1)-(4^{n_0}-1)$ devrait être multiple de 3.

Or $(4^{n_0}+1)-(4^{n_0}-1) = 4^{n_0}+1-4^{n_0}+1$
$= 2$,
qui n'est pas multiple de 3.

L'hypothèse de l'existence d'un rang n_0 tel que Q_{n_0} soit vraie est donc fausse. Ainsi, nous avons prouvé par l'absurde que, pour tout entier naturel n, Q_n est fausse.

Exercice 5 : P_n : « 9 divise 10^n+1 »

1) On suppose que P_n est vraie. Il existe donc un entier k_n tel que $10^n+1 = 9k_n$.

$10^n+1 = 9k_n \iff 10^n = 9k_n - 1$.

$10^{n+1}+1 = 10^n \times 10 + 1$
$= (9k_n - 1) \times 10 + 1$
$= 90k_n - 10 + 1$
$= 90k_n - 9$
$= 9(10k_n - 1)$

qui est un entier que l'on peut nommer k_{n+1}

$10^{n+1}+1$ est donc aussi multiple de 9, si 10^n+1 l'est.

2) $10^0+1 = 1+1 = 2$, qui n'est pas multiple de 9
→ P_0 est fausse

$10^1+1 = 10+1 = 11$, qui n'est pas multiple de 9
→ P_1 est fausse

$10^2+1 = 100+1 = 101$ $\quad 1+0+1 = 2$
101 n'est pas multiple de 9 → P_2 est fausse

$10^3+1 = 1001$ $\quad 1+0+0+1 = 2$
1001 n'est pas multiple de 9 → P_3 est fausse.

3) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 9 divise 10^n-1.

* Pour rang $n=0$: $10^n-1 = 10^0-1 = 1-1 = 0$
$= 0 \times 9$
→ il est vrai que 9 divise 10^n-1.

Suite de l'exercice 5, question 3.

* HRn : On suppose qu'il existe un rang $n \geqslant 0$ auquel 9 divise $10^n - 1$, soit qu'il existe un entier l_n tel que $10^n - 1 = 9l_n$ ou encore $10^n = 9l_n + 1$

* Montrons qu'alors, 9 divise $10^{n+1} - 1$.

$$10^{n+1} - 1 = 10^n \times 10 - 1$$
$$= (9l_n + 1) \times 10 - 1 \text{ avec } l_n \in \mathbb{Z}, \text{ d'après HRn}$$
$$= 90l_n + 10 - 1$$
$$= 90l_n + 9$$
$$10^{n+1} - 1 = 9(10l_n + 1)$$

qui est un entier que l'on peut noter l_{n+1}

$10^{n+1} - 1$ est donc, lui aussi, divisible par 9.

Conclusion : Pour tout entier naturel n, 9 divise $10^n - 1$.

4) Supposons qu'il existe un entier n_0 pour lequel 9 divise $10^{n_0} + 1$. Il existerait alors un entier k tel que $10^{n_0} + 1 = 9k$ soit $10^{n_0} = 9k - 1$. (1)

On a vu à la question 3) que, pour tout entier naturel n, 9 divise $10^n - 1$.
On a donc le cas particulier : 9 divise $10^{n_0} - 1$ qui est vrai aussi. Donc il existe un entier l tel que $10^{n_0} - 1 = 9l$ soit $10^{n_0} = 9l + 1$ (2)

D'après (1) et (2), $10^{n_0} = 9k - 1 = 9l + 1$, donc

$9k - 9l = 2$, soit $9(k - l) = 2$

$k - l$, différence de 2 entiers, est un entier.

9 x un entier = 2 impliquerait que 2 est un multiple de 9, ce qui est faux.

Notre supposition « Il existe un entier n_0 tel que 9 divise $10^{n_0} + 1$ » est donc fausse.

Nous avons prouvé par l'absurde que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n + 1$ n'est pas divisible par 9.

Exercice 6 : (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 8 & (H_1) \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} & (H_2) \end{cases}$

* Au rang $n = 0$: $3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5 = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^0 + 5$
$= 3 \times 1 + 5$
$= 8$
$= u_0$ d'après (H_1)

→ il est vrai que $u_n = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$

* HRn : On suppose qu'il existe un certain rang $n \in \mathbb{N}$ auquel

$u_n = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$ est vraie.

* Montrons qu'alors, $u_{n+1} = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} + 5$

D'après (H_2), on sait que $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$

Suite de l'exercice 6. On a donc, d'après HRn.

$$u_{n+1} = \frac{2}{5}\left(3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5\right) + 3$$

$$= \frac{2}{5}\times 3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{2}{5}\times 5 + 3$$

$$= 3\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} + 2 + 3$$

$$u_{n+1} = 3\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} + 5 \quad \text{C.Q.F.D}$$

Conclusion: Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5}$

Exercice 7 : (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 0 & (H_1) \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \quad \forall n\in\mathbb{N} & (H_2) \end{cases}$

* Rang $n=0$: $5\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) = 5\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^0\right)$

$= 5\times(1-1)$

$= 5\times 0$

$= 0$

$= u_0$ d'après (H_1)

→ il est donc vrai que $u_n = 5\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$

* HRn : On suppose qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ auquel

$$u_n = 5\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

* Montrons qu'alors, $u_{n+1} = 5\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$

D'après HRn, $u_n = 5\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$

Donc, d'après (H_2) et HRn, on peut écrire :

$$u_{n+1} = \frac{2}{5}\times\underbrace{5\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}_{u_n} + 3$$

$$= 2 - 2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n + 3$$

$$= 5 - 5\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

↖ Ça ne change pas un nombre de le multiplier puis de le diviser par 5.

$$= 5\times 1 - 5\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \quad \text{car } \frac{2}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

$$u_{n+1} = 5\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) \quad \text{C.Q.F.D}$$

en factorisant par 5 : $ka - kb = k(a-b)$

Conclusion : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n = 5\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$

Exercice 8 : (u_n) est définie par $\begin{cases} u_1 = 5 & (H_1) \\ \forall n\geq 2,\ u_n = 2u_{n-1} - n & (H_2) \end{cases}$

On souhaite montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_n = 2\left(2^{n-1}+1\right) + n$$

Suite de l'exercice 8 : * Au rang $n=1$:

$$2\times(2^{n-1}+1)+n = 2\times(2^{1-1}+1)+1$$
$$= 2\times(2^{0}+1)+1$$
$$= 2\times(1+1)+1$$
$$= 2\times 2 + 1$$
$$= 4+1$$
$$= 5$$
$$= u_1 \text{ d'après } (H_1)$$

→ il est vrai que $u_n = 2\times(2^{n-1}+1)+n$

* HR$_n$: On suppose qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ auquel

$$u_n = 2\times(2^{n-1}+1)+n$$

* Montrons qu'alors, $u_{n+1} = 2\times(2^{n+1-1}+1)+(n+1)$

On sait d'après (H_2) que $u_{n+1} = 2u_{n+1-1} - (n+1)$

soit $u_{n+1} = 2u_n - n - 1$

D'après HR$_n$, on a donc :

$$u_{n+1} = 2\times\left[2\times(2^{n-1}+1)+n\right] - n - 1$$
$$= 4(2^{n-1}+1) + 2n - n - 1$$
$$= 4\times 2^{n-1} + 4 + n - 1$$
$$= 2\times 2\times 2^{n-1} + n + 3$$
$$= 2\times 2^{n} + 2 + n + 1$$
$$= 2\times(2^{n}+1) + (n+1)$$
$$u_{n+1} = 2\times(2^{n+1-1}+1) + (n+1) \quad \text{C.Q.F.D}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2\times(2^{n-1}+1)+n$

Exercice 9 : La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 & (H_1) \\ u_{n+1} = 3u_n + n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} & (H_2) \end{cases}$$

On souhaite montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{u_n = \frac{11}{4}\times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}}$$

* Au rang $n=0$: $\frac{11}{4}\times 3^0 - \frac{3}{4} - \frac{0}{2} = \frac{11}{4} - \frac{3}{4} - 0$

$$= \frac{8}{4}$$
$$= 2$$
$$= u_0 \text{ d'après } (H_1)$$

→ la formule encadrée est vraie.

Suite de l'exercice 9 : * HR_n : On suppose qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ auquel $u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}$

* Montrons qu'alors : $u_{n+1} = \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{n+1}{2}$

On sait d'après (H_2) que :

$u_{n+1} = 3u_n + n + 1$.

D'après HR_n, on peut alors écrire :

$$u_{n+1} = 3\left[\frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}\right] + n + 1$$

$$= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{9}{4} - \frac{3n \times 2}{2 \times 2} + \frac{(n+1) \times 4}{1 \times 4}$$

$$= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{9}{4} - \frac{6n}{4} + \frac{4n+4}{4}$$

$$= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} + \frac{-2n-5}{4}$$

$$= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{5}{4} - \frac{2n}{4}$$

$$= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{2}{4} - \frac{2n}{4}$$

$$= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{2+2n}{4}$$

$$= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{2(1+n)}{2 \times 2}$$

$$u_{n+1} = \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{n+1}{2}$$ C.Q.F.D

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}}$

Exercice 10 : (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} & (H_1) \\ u_{n+1} = 5u_n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} & (H_2) \end{cases}$

1) $u_0 = \frac{1}{4}$ ← 1er terme

$u_1 = 5u_0 - 1 = 5 \times \frac{1}{4} - 1 = \frac{5}{4} - \frac{4}{4} = \frac{1}{4}$ ← 2ème terme

$u_2 = 5u_1 - 1 = \frac{1}{4}$ ← 3ème terme

2) Il semblerait que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{4}$.

3) * Au rang $n = 0$: $u_n = u_0 = \frac{1}{4}$ d'après (H_1)
→ il est vrai que $u_n = \frac{1}{4}$

* HR_n : On suppose que, pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{4}$

* Montrons qu'alors, $u_{n+1} = \frac{1}{4}$ aussi.

$u_{n+1} = 5u_n - 1$ d'après (H_2)

$= 5 \times \frac{1}{4} - 1$ d'après HR_n

$= \frac{5}{4} - \frac{4}{4}$

$u_{n+1} = \frac{1}{4}$ C.Q.F.D

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{4}$.

Exercice 11 : (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 & (H_1) \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} & (H_2) \end{cases}$

1) La formule à écrire en B3 est : **$= B2 + 2 * A3 + 1$**

(u_n à la cellule au-dessus ; n à la cellule de gauche)

2)

	A	B
1	n	U_n
2	0	0
3	1	1 ← $= B2 + 2 * A3 + 1$
4	2	4
5	3	9
6	4	16
7	5	25
8	6	36
9	7	49
10	8	64

recopiée vers le bas jusqu'en B10.

en B10 : $= B9 + 2 * A10 + 1$

3) Conjecture : il semblerait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.

* Pour rang $n = 0$: $n^2 = 0^2 = 0 = u_0$ d'après (H_1)
On a bien $u_n = n^2$

* HR_n : On suppose qu'à un certain rang $n \geq 0$, $u_n = n^2$

* Montrons qu'alors, $u_{n+1} = (n+1)^2$

$u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ d'après (H_2)
$= n^2 + 2n + 1$ d'après HR_n
$= (n+1)^2$ d'après la 1ère identité remarquable.

c.q.f.d

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$

Exercice 12 - Récurrence d'ordre 2. (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 & (H_1) \\ u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* & (H_2) \end{cases}$$

On veut prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{u_n = (-2)^n - 3 \times (-1)^n}$$

* Pour rang $n = 1$ et rang $n = 2$

$n = 1$: $(-2)^n - 3 \times (-1)^n = (-2)^1 - 3 \times (-1)^1 = -2 + 3 = 1 = u_1$ d'après (H_1)

→ Vrai au rang $n = 1$

$n = 2$: $(-2)^2 - 3 \times (-1)^2 = 4 - 3 \times 1 = 1 = u_2$

→ Vrai au rang $n = 2$

* HR : On suppose qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :
* $u_n = (-2)^n - 3 \times (-1)^n$ (HR_n)
* $u_{n+1} = (-2)^{n+1} - 3 \times (-1)^{n+1}$ (HR_{n+1})

* Montrons qu'alors : $u_{n+2} = (-2)^{n+2} - 3 \times (-1)^{n+1}$

$u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n$ d'après l'hypothèse (H_2)

$= -3\left[(-2)^{n+1} - 3 \times (-1)^{n+1}\right] - 2\left[(-2)^n - 3 \times (-1)^n\right]$

($(-2)^{n+1} - 3 \times (-1)^{n+1}$ d'après HR_{n+1} ; $(-2)^n - 3 \times (-1)^n$ d'après HR_n)

$= -3 \times (-2)^{n+1} + 3 \times 3 \times (-1)^{n+1} - 2 \times (-2)^n + 6 \times (-1)^n$

$= -3 \times (-2) \times (-2)^n - 2 \times (-2)^n + 9 \times (-1) \times (-1)^n + 6 \times (-1)^n$

Suite de l'exercice 12. Je factorise les 2 premiers termes par $(-2)^n$ et les 2 derniers par $(-1)^n$:

$$u_{n+1} = (-2)^n[6-2] + (-1)^n[-9+6]$$
$$= (-2)^n \times 4 + (-1)^n \times (-3)$$
$$= (-2)^n \times (-2)^2 - 3 \times (-1)^n$$
$$u_{n+1} = (-2)^{n+2} - 3 \times (-1)^{n+2} \quad \text{C.Q.F.D}$$

Car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n = (-1)^{n+2} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ pair} \\ -1 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$

Conclusion : Pour tout entier naturel non nul n, on a bien $\boxed{u_n = (-2)^n - 3 \times (-1)^n}$

Exercice 13 : (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 4 \\ u_{n+2} = \frac{5}{2} u_{n+1} - \frac{3}{2} u_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) En B4, on peut écrire : $\boxed{= 5*B3/2 - 3*B2/2}$

par exemple

$$u_2 = \frac{5}{2} u_1 - \frac{3}{2} u_0 = \frac{5}{2} \times 4 - \frac{3}{2} \times 4$$
$$= \frac{5 \times 2 \times 2}{2} - \frac{3 \times 2 \times 2}{2} = 10 - 6 = 4$$

→ Il semblerait que (u_n) soit une suite constante, avec tous ses termes égaux à 4.

2) * On sait par hypothèse que $u_0 = u_1 = 4$.

La propriété "$u_n = 4$" est donc vraie aux rangs $n=0$ et $n=1$

* On suppose qu'il existe un n appartenant à $\mathbb{N}$ tel que :

$$\text{et} \begin{cases} u_n = 4 & HR_n \\ u_{n+1} = 4 & HR_{n+1} \end{cases}$$

* Montrons qu'alors, $u_{n+2} = 4$

$$u_{n+2} = \frac{5}{2} u_{n+1} - \frac{3}{2} u_n \quad \text{d'après l'énoncé}$$
$$= \frac{5}{2} \times 4 - \frac{3}{2} \times 4 \quad \text{d'après } HR_{n+1} \text{ et } HR_n$$
$$= 4 \quad \text{(même calcul que pour } u_2\text{)} \quad \text{C.Q.F.D}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4$.

Exercice 14 : (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 & (H_1) \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad \forall n \geq 2 & (H_2) \end{cases}$

→ C'est la suite de Fibonacci

Et on pose $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = le nombre d'or

1) $\boxed{\phi^2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}$

car la puissance se distribue sur la division.

$$\phi^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} \quad \text{d'après la 1ère identité remarquable.}$$

$$\phi^2 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{2 \times 2} = \boxed{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\boxed{\phi + 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} = \boxed{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

↘ d'où $\phi^2 = \phi + 1$

C.Q.F.D

Suite de l'exercice 14 : 3) $\phi^3 = \phi \times \phi^2$

$= \phi \times (\phi + 1)$ ← j'ai remplacé ϕ^2 par $\phi + 1$

$= \phi^2 + \phi$

$= \phi + 1 + \phi$ ← fin de ces 2 étapes.

$\boxed{\phi^3 = 2\phi + 1}$ (u_2, u_1)

$\phi^4 = \phi \times \phi^3$

$= \phi \times (2\phi + 1)$ ← j'ai remplacé ϕ^3 par $2\phi + 1$

$= 2\phi^2 + \phi$

$= 2(\phi + 1) + \phi$ ← j'ai remplacé ϕ^2 par $\phi + 1$

$= 2\phi + 2 + \phi$

$\boxed{\phi^4 = 3\phi + 2}$ (u_3, u_2)

$\phi^5 = \phi \times \phi^4$

$= \phi \times (3\phi + 2)$

$= 3\phi^2 + 2\phi$

$= 3(\phi + 1) + 2\phi$

$= 3\phi + 3 + 2\phi$

$\boxed{\phi^5 = 5\phi + 3}$ (u_4, u_3)

et on a :

$\boxed{\phi^2 = 1\phi + 1}$ (u_1, u_0)

3) Conjecture : il semblerait que, pour tout $n \geq 2$,

$\boxed{\phi^n = u_{n-1}\phi + u_{n-2}}$ (a, b)

4) * Au rang $n=2$, on a vu que $\phi^2 = 1\phi + 1$

et on sait que $u_0 = u_1 = 1$.

On a donc $\phi^2 = u_1\phi + u_0$

→ Pour $n=2$, on a bien $\boxed{\phi^n = u_{n-1}\phi + u_{n-2}}$

* HRn : On suppose qu'il existe un rang $n \geq 2$ pour lequel on a :

$\boxed{\phi^n = u_{n-1}\phi + u_{n-2}}$

* Montrons qu'alors : $\phi^{n+1} = u_n\phi + u_{n-1}$.

$\phi^{n+1} = \phi \times \phi^n$

$= \phi \times (u_{n-1}\phi + u_{n-2})$ d'après HRn

$= u_{n-1}\phi^2 + u_{n-2}\phi$

$= u_{n-1}(\phi + 1) + u_{n-2}\phi$ d'après la question 1)

$= u_{n-1}\phi + u_{n-1} + u_{n-2}\phi$

$= (u_{n-1} + u_{n-2})\phi + u_{n-1}$

$\phi^{n+1} = u_n\phi + u_{n-1}$ d'après l'hypothèse (Hn) (définition de la suite (u_n)) C.Q.F.D

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 2$, $\boxed{\phi^n = u_{n-1}\phi + u_{n-2}}$

4) On a vu que, pour tout $n \geq 2$, on peut écrire ϕ^n sous la forme $\phi^n = a\phi + b$.

L'algorithme calcule les coefficients a et b quand on lui fournit n. a et b sont égaux respectivement à u_{n-1} et u_{n-2}.

A chaque itération du POUR, a doit prendre la valeur a+b (car $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$) et b doit prendre la valeur de a.

Cette valeur de a est stockée dans la variable c, puis a prend la valeur a+b, avant que l'ancienne valeur de a, stockée dans c, soit attribué à b.

On a ainsi :

```
POUR i ALLANT DE 1 À N-2
    DÉBUT POUR
    c prend la valeur a
    a prend la valeur a+b
    b prend la valeur c
    FIN POUR
```

$\phi^{35} = u_{34}\,\phi + u_{33}$

$\boxed{\phi^{35} = 9\,227\,465\,\phi + 5\,702\,887}$ d'après l'algorithme programmé sur algobox.

Exercice 15 :

$$\begin{cases} 0! & (H_1) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = (n+1) \times n! & (H_2) \end{cases}$$

* Etu rang $n = 1$: $1! = 1 \times 0!$ d'après (H_2)
$= 1 \times 1$ d'après (H_1)
donc $1! = 1$

On a bien $n = \underbrace{1 \times 2 \times \dots \times n}_{n \text{ facteurs}}$
avec 1 facteur égal à $n = 1$ dans ce cas.

* HRn : On suppose qu'il existe un rang $n \geq 1$ auquel $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$

* Montrons qu'alors : $(n+1)! = 1 \times 2 \times \dots \times n \times (n+1)$

D'après (H_2), $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Je peux remplacer $n!$ par $1 \times 2 \times \dots \times n$ d'après HRn

Cela donne : $(n+1)! = (n+1) \times 1 \times 2 \times \dots \times n$
$= 1 \times 2 \times \dots \times n \times (n+1)$ C.Q.F.D

Conclusion : pour tout $n \geq 1$, $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.

Exercice 16 : Pour $n = 0$, $3^0 = 1$ $\quad 0! = 1$ $\quad 3^0 = 0!$

Pour $n = 1$, $3^1 = 3$ $\quad 1! = 1$ $\quad 3^1 > 1!$

Pour $n = 2$, $3^2 = 9$ $\quad 2! = 1 \times 2 = 2$ $\quad 3^2 > 2!$

Pour $n = 3$, $3^3 = 27$ $\quad 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ $\quad 3^3 > 3!$

Suite de l'exercice 16, question 1 :

Pour $n=4$: $3^4 = 81$ $\quad 4! = 4\times3\times2\times1 = 24$ $\quad 3^4 > 4!$

Pour $n=5$: $3^5 = 243$ $\quad 5! = 24\times5 = 120$ $\quad 3^5 > 5!$

Pour $n=6$: $3^6 = 243\times3 = 729$ $\quad 6! = 120\times6 = 720$ $\quad 3^6 > 6!$

(on se rapproche)

Pour $n=7$: $3^7 = 729\times3 = 2187$ $\quad 7! = 720\times7 = 5040$ $\quad 3^7 < 7!$

(ici, $n!$ devient plus grand que 3^n)

2) Je conjecture que, pour $n \geqslant 8$, $n!$ sera toujours plus grand que 3^n (détail de la conjecture après la conclusion)

3) * Pour rang $n=7$, on a vu que $3^7 < 7!$

* On suppose qu'il existe un rang $n \geqslant 7$ auquel $3^n < n!$ HRn

* Montrons qu'alors $3^{n+1} < (n+1)!$

On sait que : $0 < 3^n < n!$

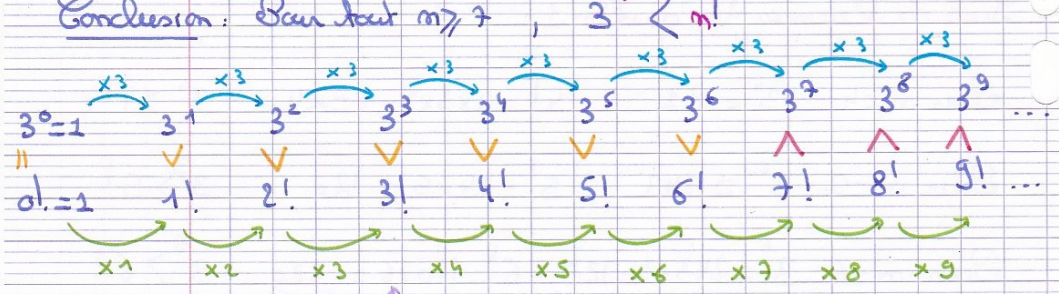
et que $0 < 3 < n+1$ puisque $n \geqslant 7$

donc $0 < 3^n \times 3 < n! \times (n+1)$

soit $0 < 3^{n+1} < (n+1)!$ C.Q.F.D

La règle n°4 sur l'ardoise (on peut multiplier membre à membre 2 inégalités de même sens lorsque tous les membres sont positifs) m'a permis de faire la multiplication membre à membre.

Conclusion : Pour tout $n \geqslant 7$, $3^n < n!$



à partir d'ici, on multiplie par des nombres plus grands dans la 2ème suite

ici, la comparaison s'inverse. C'est pourquoi il est prévisible qu'à partir du rang $n=7$, $n!$ sera plus grand que 3^n, et que l'écart entre les 2 croîtra en grandissant.

Ces considérations sont vraiment valables car les 2 suites sont à termes positifs.

Exercice 17 :

On souhaite démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}\, b^i$$

Remarque : On suppose que a et b sont des réels, ou éventuellement des complexes.

* Pour rang $n=1$: $a^1 - b^1 = a-b$

$$(a-b)\sum_{i=0}^{1-1} a^{1-1-i}\, b^i = (a-b)\times a^0 \times b^0$$

$$= (a-b)\times 1 \times 1$$

$$= a-b$$

L'égalité à prouver est donc vraie pour $n=1$.

Suite de l'exercice 17 : * On suppose qu'il existe un rang $n \geqslant 1$ auquel :

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i} \quad \text{HRn}$$

* Prouvons qu'alors : $\boxed{a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{i=0}^{n} a^{n-i} b^i}$

En suivant la suggestion :

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= a \times a^n - b \times b^n \\ &= [(a-b)+b]a^n - b \times b^n \\ &= (a-b)a^n + b \times a^n - b \times b^n \\ &= (a-b)a^n + b(a^n - b^n) \\ &= (a-b)a^n + b(a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} &= (a-b)\left[a^n + b\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i\right] \\ &= (a-b)\left[a^n + \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^{i+1}\right] \end{aligned}$$

Changement d'indice : $j = i+1$ → i va de 0 à $n-1$; j va de 1 à n

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left[a^n + \sum_{j=1}^{n} a^{n-j} b^j\right]$$

Remarquons que $a^{n-0} \times b^0 = a^n$

On a donc : $\boxed{a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{j=0}^{n} a^{n-j} b^j}$

C.Q.F.D car peu importe que l'indice s'appelle i ou j.

J'aurais eu une autre idée : HRn nous permet d'écrire que :

$$a^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i + b^n$$

D'où

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= a \times a^n - b \times b^n \\ &= a\left[(a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i + b^n\right] - b \times b^n \\ &= (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i} b^i + ab^n - bb^n \end{aligned}$$

↑ j'augmente de 1 la puissance de a

$$\begin{aligned} &= (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i} b^i + (a-b)b^n \\ &= (a-b)\left[\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i} b^i + b^n\right] \end{aligned}$$

On a $b^n = a^{n-n} b^n$ → c'est le $n^{\text{ième}}$ terme de la somme

Donc $\boxed{a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{i=0}^{n} a^{n-i} b^i}$ C.Q.F.D

Sans aurais besoin de changer d'indice.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i}$

Exercice 18 : (t_n) est définie par $\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$ $\begin{matrix} (H_1) \\ (H_2) \end{matrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

On veut savoir si $t_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Suite de l'exercice 18 On peut remarquer rapidement que c'est vrai pour $t=0$, et on remarque aussi que, d'après (H_2), $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $t_{n+1}-t_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

Je vérifie si c'est cohérent avec la formule proposée :

Si on avait bien $t_n=\dfrac{n}{n+1}$ pour tout n,

alors on aurait $t_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+2}$

Et on aurait : $t_{n+1}-t_n=\dfrac{n+1}{n+2}-\dfrac{n}{n+1}$

$=\dfrac{(n+1)(n+1)}{(n+2)(n+1)}-\dfrac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}$

$=\dfrac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)}$

$=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

→ Le résultat qu'on demande de tester semble donc vraisemblable.

Je vais essayer de prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, $t_n=\dfrac{n}{n+1}$

* Au rang $n=0$: $\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{0}{0+1}=0=t_0$ d'après (H_1)

→ il est vrai que $t_n=\dfrac{n}{n+1}$

* HRn : On suppose qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ auquel $t_n=\dfrac{n}{n+1}$

* Montrons qu'alors, $t_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+1+1}$ soit $t_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+2}$

On sait d'après (H_2) que $t_{n+1}=t_n+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

Et HRn nous dit que $t_n=\dfrac{n}{n+1}$. On en déduit que :

$t_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

$=\dfrac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ on peut car $(n+2)$ est non nul puisque $n\in\mathbb{N}$

$=\dfrac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$ $\quad a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$=\dfrac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$

$\boxed{t_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+2}}$ en simplifiant par $n+1$ qui est non nul puisque $n\in\mathbb{N}$

C.Q.F.D

Conclusion : La proposition « pour tout entier naturel n, $t_n=\dfrac{n}{n+1}$ » est VRAIE.

Exercice 19 (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0=2 & (H_1)\\ u_1=6 & (H_2)\\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}=6u_n-9u_{n-1} & (H_3)\end{cases}$

1) → $u_2=6u_1-9u_0$ d'après (H_3)

$=6\times 6-9\times 2$ d'après (H_1) et (H_2)

$=36-18$

$\boxed{u_2=18}$

ici, $n=1$ pour la formule $u_{n+1}=6u_n-9u_{n-1}$

Corrigés

Suite de l'exercice n°19 :

$u_3 = 6u_2 - 9u_1$
$= 6 \times 18 - 9 \times 6$
$= 6 \times 9 \times 2 - 9 \times 6 \times 1$
$= 54 \times (2-1)$

$\boxed{u_3 = 54}$

Si je choisis de factoriser, c'est pour me permettre de faire les calculs de tête. Sinon vous pouvez très bien utiliser une calculatrice et/ou effectuer sans factoriser.

$u_4 = 6u_3 - 9u_2$
$= 6 \times 54 - 9 \times 18$
$= 6 \times 9 \times 6 - 9 \times 6 \times 3$
$= 6 \times 9 \times 3 \times 2 - 6 \times 9 \times 3 \times 1$
$= 162 \times (2-1)$

$\boxed{u_4 = 162}$

$u_5 = 6u_4 - 9u_3$
$= 6 \times 162 - 9 \times 54$
$= 2 \times 3 \times 3 \times 54 - 3 \times 3 \times 54$
$= 3 \times 3 \times 54 \, (2-1)$

$\boxed{u_5 = 486}$

Ainsi je remarque qu'à chaque fois, je peux factoriser par $3u_n$ et que finalement, $u_{n+1} = 3u_n$, ce qui caractérise une suite géométrique de raison 3.

$u_6 = 6u_5 - 9u_4$
$= 2 \times 3 \times 486 - 3 \times 3 \times 162$ avec $486 = 3 \times 162$
$= 3 \times 486 \, (2-1)$

$\boxed{u_6 = 1458}$

2) (u_n) semble être une suite géométrique de raison 3.

3) Je cherche à prouver par récurrence (d'ordre ?!) que (u_n) est une suite géométrique de raison 3, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n$.

* $u_0 = 2$ $u_1 = 6$ donc $u_1 = 3u_0$ → la propriété est vraie au rang $n=0$

$u_2 = 18$ d'après la question 1), donc $u_2 = 3u_1$

→ la propriété $u_{n+1} = 3u_n$ est vraie aussi pour $n=2$

* On suppose qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ auquel :

$\underbrace{u_n = 3u_{n-1}}_{HR_{n-1}}$ et $\underbrace{u_{n+1} = 3u_n}_{HR_n}$

* Montrons qu'alors, $u_{n+2} = 3u_{n+1}$.

On sait que $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$ d'après (H_3)

$= 6 \times 3u_n - 9 \times 3u_{n-1}$

d'après HR_n et HR_{n-1}

$= 3 \times (\underbrace{6u_n - 9u_{n-1}}_{u_{n+1} \text{ d'après } (H_3)})$

$= 3$

C.Q.F.D

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n$.
(u_n) est donc une suite géométrique d'ordre 3.

La formule de son terme général est donc :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = \boxed{2 \times 3^n}$

(u_0 : 1er terme, de rang 0 ; q : raison)

Je cours sur les suites géométriques