Terminale 7 C – Devoir de mathématiques n°1 – Corrigé

Forme algébrique – conjugué – module – représentation graphique – équations complexes

Exercice 1 : 1) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)^2}=\dfrac{1-2i+i^2}{1+2i-i^2}=\dfrac{1-2i-1}{1+2i-1}=\dfrac{-2i}{2i}$ $\boxed{\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2=-1}$

Sans la formule $(a-b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$:

$B=(2-i)^3-(1+i)(1-2i)(1+3i)$
$B=(2-i)^2(2-i)-(1-2i+i-2i^2)(1+3i)$
$B=(4-4i+i^2)(2-i)-(1-i+2)(1+3i)$
$B=(3-4i)(2-i)-(3-i)(1+3i)$
$B=6-3i-8i+4i^2-(3+9i-i-3i^2)$

Ne pas oublier de développer dans une parenthèse après un –.

$B=6-11i-4-(3+8i+3)$
$B=2-11i-(6+8i)$
$B=2-11i-6-8i$
$\boxed{B=-4-19i}$

$C=(-2+3i)^4$
$C=(-2+3i)^2\times(-2+3i)^2$
$C=(4-12i+9i^2)\times(4-12i+9i^2)$
$C=(-5-12i)^2$
$C=25-(-120i)+144i^2$
$C=25+120i-144$
$\boxed{C=-119+120i}$

Avec la formule $(a-b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$:

$B=(2-i)^3-(1+i)(1-2i)(1+3i)$
$B=8-3\times2^2\times i+3\times2\times i^2-i^3+(1-2i-i-2i^2)(1+3i)$ $B=8-12i-6+i-(3-i)(1+3i)$
$B=2-11i-(3+9i-i-3i^2)$
$B=2-11i-(6+8i)$
$\boxed{B=-4-19i}$

2) $f(z)=\dfrac{1+z+z^2+z^3}{1+z}$ a) $f(i)=\dfrac{1+i+i^2+i^3}{1+i}=\dfrac{1+i-1-i}{1+i}$ $\boxed{f(i)=0}$

$f(i-1)=\dfrac{1+(i-1)+(i-1)^2+(i-1)^3}{1+(i-1)}=\dfrac{i+i^2-2i+1+i^3-3i^2+3i-1}{i}=\dfrac{i-1-2i+1-i+3+3i-1}{i}$

$f(i-1)=\dfrac{2+i}{i}$ $f(i-1)=\dfrac{(2+i)\times(-i)}{i\times(-i)}$ $f(i-1)=\dfrac{-2i-i^2}{1}$ $\boxed{f(i-1)=1-2i}$

$f(2+i)=\dfrac{1+(2+i)+(2+i)^2+(2+i)^3}{1+(2+i)}=\dfrac{3+i+4+4i+i^2+8+12i+6i^2+i^3}{3+i}=\dfrac{15+17i-1-6-i}{3+i}=\dfrac{8+16i}{3+i}$

$f(2+i)=\dfrac{(8+16i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{24-8i+48i-16i^2}{9-i^2}=\dfrac{40+40i}{10}=4+4i$ $\boxed{f(2+i)=4+4i}$

Méthode plus astucieuse si l'on remarque que le numérateur de f(z) se factorise par (1+z) :

Pour tout $z\neq-1$, $f(z)=\dfrac{1+z+z^2(1+z)}{1+z}=\dfrac{(1+z)(1+z^2)}{1+z}$ $f(z)=1+z^2$

$f(i)=1+i^2=1-1=0$ $f(i-1)=1+(i-1)^2=1+i^2-2i+1=1-2i$

$f(2+i)=1+(2+i)^2=1+4+4i+i^2=1+4+4i-1=4+4i$

b) On résout dans $\mathbb{C}-\{-1\}$ $f(z)=0 \Leftrightarrow 1+z^2=0$ (au moment de résoudre, on est obligé de penser à la factorisation) $f(z)=0 \Leftrightarrow z^2=-1 \Leftrightarrow z=i$ ou $z=-i$ $\boxed{S=\{-i;i\}}$

Exercice 2 : 1) a) $(1+2i)z-(i-1)=iz-3$ (E_1) b) $\dfrac{1+2iz}{1+2z}=i\dfrac{z-1}{z+3}$ (E_2) On résout dans $\mathbb{C}-\{-3;-\frac{1}{2}\}$

$$(E_1) \Leftrightarrow (1+2i)z-iz=-3+i-1$$
$$(E_1) \Leftrightarrow (1+2i-i)z=-4+i$$
$$(E_1) \Leftrightarrow z=\frac{-4+i}{1+i}$$
$$(E_1) \Leftrightarrow z=\frac{(-4+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$(E_1) \Leftrightarrow \frac{-4+4i+i-i^2}{1-i^2}$$
$$(E_1) \Leftrightarrow \frac{-4+1+5i}{2}$$
$$(E_1) \Leftrightarrow -\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$$
$$\boxed{S=\{-\frac{3}{2}+\frac{5}{3}i\}}$$

$$(E_2) \Leftrightarrow (z+3)(1+2iz)=i(z-1)(1+2z)$$
$$(E_2) \Leftrightarrow z+2iz^2+3+6iz=i(z+2z^2-1-2z)$$
$$(E_2) \Leftrightarrow 2iz^2+z+6iz+3=2iz^2-iz-i$$
$$(E_2) \Leftrightarrow z(1+7i)=-3-i$$
$$(E_2) \Leftrightarrow z=\frac{(-3-i)(1-7i)}{(1+7i)(1-7i)}$$
$$(E_2) \Leftrightarrow z=\frac{-3+21i-i+7i^2}{1-49i^2}$$
$$(E_2) \Leftrightarrow z=\frac{-10+20i}{50} \Leftrightarrow z=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$$
$$\boxed{S=\{-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\}}$$

qui est bien différent de -3 et $-\frac{1}{2}$

2) (Sys) $\begin{cases} \left|\dfrac{z-12}{z-8}\right|=\dfrac{5}{3} \\ \left|\dfrac{z-4}{z-8}\right|=1 \end{cases}$ Ce système est défini pour $z\neq 8$

(Sys) $\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z-12}{z-8}\right|^2=\dfrac{25}{9} \\ |z-4|^2=|z-8|^2 \end{cases}$ (Sys) $\Leftrightarrow \begin{cases} 9|z-12|^2=25|z-8|^2 \\ |z-4|^2=|z-8|^2 \end{cases}$

Posons $z=x+iy$ avec $x=\text{Re}(z)$ et $y=\text{Im}(z)$, notre système est équivalent à résoudre dans $\mathbb{R}^2-\{(8;0)\}$:

(Sys') $\begin{cases} 9((x-12)^2+y^2)=25((x-8)^2+y^2) \\ (x-4)^2+y^2=(x-8)^2+y^2 \end{cases}$

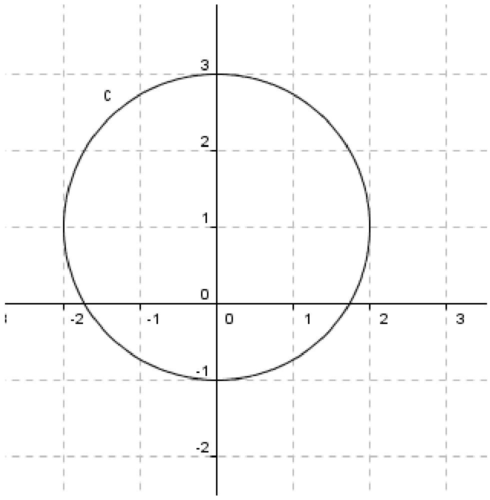
En effet : Pour tout complexe $z=x+iy$ (avec x et y réels), $|z|^2=|x|^2+|y|^2$.
Donc on a par exemple : $|z-12|^2=(\text{Re}(z-12))^2+(\text{Im}(z-12))^2=(x-12)^2+y^2$

(Sys') $\Rightarrow$ $(x-4)^2=(x-8)^2$ (deuxième ligne) $\Leftrightarrow$ $x^2-8x+16=x^2-16x+64 \Leftrightarrow 8x=48 \Leftrightarrow x=6$

Donc (Sys') $\Leftrightarrow \begin{cases} 9((6-12)^2+y^2)=25((6-8)^2+y^2) \\ x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9(36+y^2)=25(4+y^2) \\ x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 324+9y^2=100+25y^2 \\ x=6 \end{cases}$

(Sys') $\Leftrightarrow \begin{cases} 224=16y^2 \\ x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14=y^2 \\ x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{14} \text{ ou } y=-\sqrt{14} \\ x=6 \end{cases}$. Donc $\boxed{E=\{6-i\sqrt{14};6+i\sqrt{14}\}}$ car les deux solutions trouvées sont bien différentes de 8.

3) Déterminons et construisons l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $z=x+iy$ vérifie $|\bar{z}+i|=2$

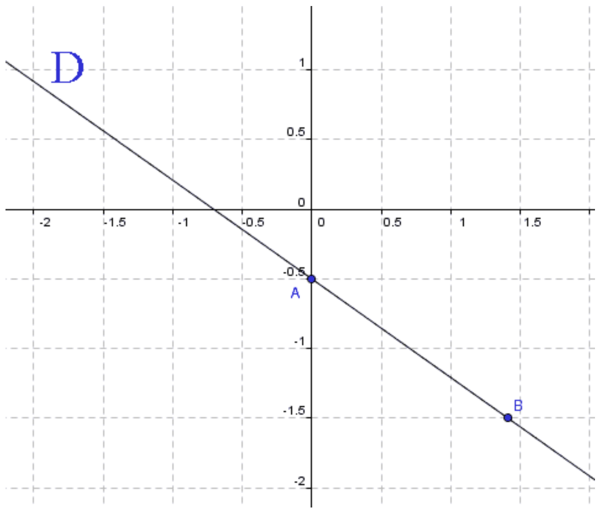


$|\bar{z}+i|=2 \Leftrightarrow |\bar{z}+i|^2=4 \Leftrightarrow |x-iy+i|^2=4$
$\Leftrightarrow x^2+(-y+1)^2=4 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=2^2$ car un réel ($(-y+1)$) et son opposé $(y-1)$ ont le même carré.

$x^2+(y-1)^2=2^2$ est une équation du cercle de centre A(0;1) et de rayon 2.

L'ensemble des points M cherchés est donc le cercle de centre A(0;1) et de rayon 2.

4) Déterminons et construisons l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $z=x+iy$ vérifie :



$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\right)z+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\right)\bar{z}+1=0$$

c'est-à-dire $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\right)(x+iy)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\right)(x-iy)+1=0$ (Eq)

(Eq) $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x-ix+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}y+y+\frac{\sqrt{2}}{2}x+ix-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}y+y+1=0$

(Eq) $\Leftrightarrow \boxed{x\sqrt{2}+2y+1=0}$

Il s'agit de l'équation cartésienne d'une droite.

L'ensemble des points $M(x;y)$ cherchés est la droite D d'équation $\boxed{x\sqrt{2}+2y+1=0}$.

Pour la construire, déterminons deux points de cette droite :

Si x=0, $2y+1=0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}$. D passe donc par $A\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

Si $x=\sqrt{2}$, $\sqrt{2}\times\sqrt{2}+2y+1=0 \Leftrightarrow 2y=-3 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}$. D passe donc par $B\left(\sqrt{2};-\frac{3}{2}\right)$

Exercice 3 : $z=x+iy$ (x et y étant des réels) un nombre complexe distinct de -1 .
$Z=\frac{2iz-\mathrm{i}}{z+1}$. Remarque : (x,y) doit être différent de (1,0) pour que Z soit défini.

1) Pour commencer, je choisis d'écrire Z sous forme algébrique : on aura alors directement $\bar{Z}$, Re(Z) et Im(Z).

$Z=\frac{2\mathrm{i}(x+iy)-\mathrm{i}}{x+iy+1}$ $\quad Z=\frac{2ix-2y-\mathrm{i}}{x+1+iy}$ $\quad Z=\frac{(-2y+2ix-\mathrm{i})(x+1-iy)}{(x+1+iy)(x+1-iy)}$

$Z=\frac{-2xy-2y+2iy^2+2ix^2+2ix+2xy-ix-\mathrm{i}-y}{(x+1)^2+y^2}$ $\quad Z=\frac{-3y}{(x+1)^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{2x^2+2y^2+x-1}{(x+1)^2+y^2}$

Donc $\boxed{\bar{Z}=\frac{-3y}{(x+1)^2+y^1}-\mathrm{i}\frac{2x^2+2y^2+x-1}{(x+1)^2+y^2}}$, $\boxed{\mathrm{Re}(Z)=\frac{-3y}{(x+1)^2+y^2}}$ et $\boxed{\mathrm{Im}(Z)=\frac{2x^2+2y^2+x-1}{(x+1)^2+y^2}}$.

$$|Z|^2 = Z\times\overline{Z} = \frac{2iz-i}{z+1}\times\frac{-2i\overline{z}+i}{\overline{z}+1} = \frac{4z\overline{z}-2\overline{z}-2z+1}{z\overline{z}+z+\overline{z}+1} = \frac{4z\overline{z}-2(z+\overline{z})+1}{z\overline{z}+z+\overline{z}+1}.$$

Or $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)=2x$ et $z\overline{z}=|z|^2=x^2+y^2$ Donc $|Z|^2=\dfrac{4(x^2+y^2)-4x+1}{x^2+y^2+2x+1}$.

Donc $\boxed{|Z|=\sqrt{\dfrac{4(x^2+y^2)-4x+1}{x^2+y^2+2x+1}}}$

2) Déterminons l'ensemble E_1 des points $M(x,y)$ tels que $|Z|=1$.

Rappel : on résout pour z≠1, donc pour (x,y) ≠ (1,0)

$$|Z|=1 \Leftrightarrow |Z|^2=1 \Leftrightarrow \frac{4(x^2+y^2)-4x+1}{x^2+y^2+2x+1}=1 \Leftrightarrow 4x^2+4y^2-4x+1=x^2+y^2+2x+1$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2-6x=0 \quad \Leftrightarrow x^2+y^2-2x=0 \quad \Leftrightarrow (x^2-2x+1)+y^2-1=0$$

$\Leftrightarrow \boxed{(x-1)^2+y^2=1^2}$ $\boxed{(E_1)}$ est le cercle de centre A(1,0) et de rayon 1 (on vérifie que A(1,0) n'appartient pas à ce cercle, c'est le cas car A est son centre et que son rayon est non nul).

Autre calcul possible (dans ℂ-{1}) : $|Z|=1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2iz-i}{z+1}\right|=1 \Leftrightarrow \dfrac{|2iz-i|}{|z+1|}=1 \Leftrightarrow |i(2z-1)|=|z+1|$

$$|Z|=1 \Leftrightarrow |i|\times|2z-1|=|z+1| \quad \Leftrightarrow 1\times|2z-1|=|z+1|$$
$$\Leftrightarrow |2z-1|^2=|z+1|^2 \quad \Leftrightarrow |2(x+iy)-1|^2=|x+iy+1|^2 \quad \Leftrightarrow (2x-1)^2+(2y)^2=(x+1)^2+y^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1+4y^2=x^2+2x+1+y^2 \quad \Leftrightarrow 3x^2-6x+3y^2=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-1=0$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$. On trouve bien une équation du cercle de centre A(1,0) et de rayon 1.

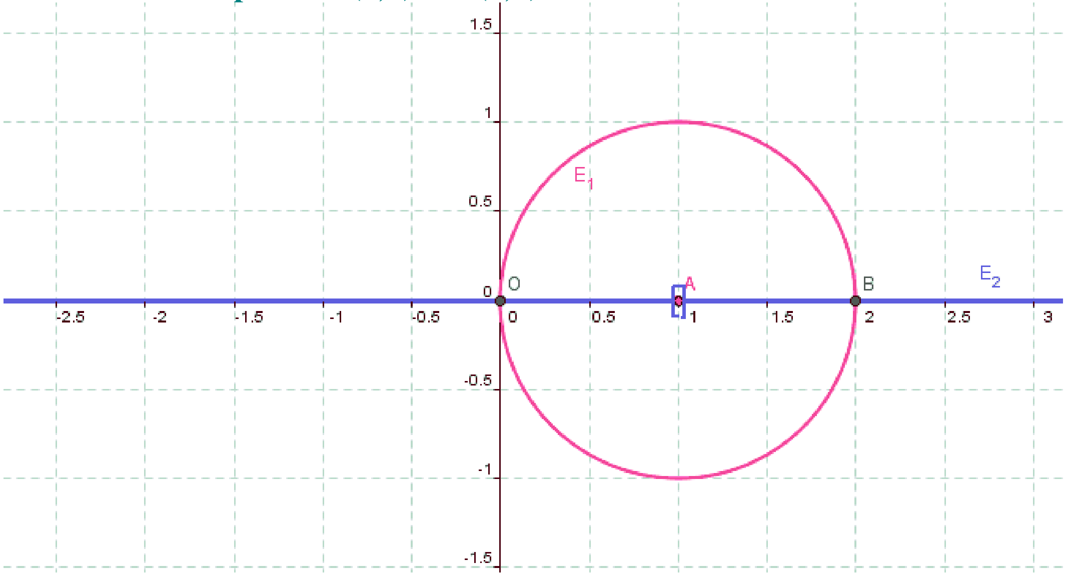
3) Déterminons l'ensemble (E_2) des points $M(x,y)$ tels que Z soit imaginaire pur.

Z sera un imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(Z)=0$, soit $\dfrac{-3y}{(x+1)^2+y^2}=0$ (dans ℂ-{1})

soit $y=0$ avec (x;y)≠(1;0)

$\boxed{(E_2)}$ est donc la droite des réels (axe des abscisses) privée du point A(1;0).

4) $E_1 \cap E_2$ est l'intersection de l'axe des abscisses privé de A avec le cercle de centre A et de rayon 1.
Il s'agit de **l'ensemble des deux points O(0;0) et B(2;0)** :



On peut le démontrer plus précisément en raisonnant comme suit :

M(x;y) ∈ $E_1 \cap E_2$ (pour (x,y) $\neq$ (1,0)) ⇔ $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\ y=0\end{cases}$ ⇔ $(x-1)^2=1$ ⇔ $\begin{cases}x-1=1 \, ou \, x-1=-1\\ y=0\end{cases}$

M(x;y) ∈ $E_1 \cap E_2$ (pour (x,y) $\neq$ (1,0)) ⇔ $\begin{cases}x=2 \, ou \, 0\\ y=0\end{cases}$. Les deux couples trouvés sont bien différents de (1;0).

Donc $\boxed{E_1 \cap E_2}$ est l'ensemble des deux points O(0;0) et B(2;0).

Exercice 4 :

$$\begin{array}{rcccccccccc} S(n) = & 1 & + & i & + & i^2 & + & i^3 & + \dots & + & i^n & \\ -iS(n) = & & - & i & - & i^2 & - & i^3 & - \dots & - & i^n & - i^{n+1} \\ \hline (1-i)S(n) = & 1 & - & i^{n+1} \end{array}$$

Donc $S(n)=\dfrac{1-i^{n+1}}{1-i}$.

On sait que $i=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$ et $i^4=1$.
Donc pour tout p ∈ ℕ, $i^{4p}=1$, $i^{4p+1}=i$, $i^{4p+2}=-1$ et $i^{4p+3}=-i$.

Donc si n est un multiple de 4, soit s'il existe un entier p tel que $n=4p$,

$S(n)=\dfrac{1-i^{4p+1}}{1-i}=\dfrac{1-i}{1-i}=1$ $\boxed{S(n)=1}$.

Si n est un multiple de 4 plus 1[1], soit s'il existe un entier p tel que $n=4p+1$:

$S(n)=\dfrac{1-i^{4p+2}}{1-i}=\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2(1+i)}{2}$ $\boxed{S(n)=1+i}$.

Si n est un multiple de 4 plus 2[2], soit s'il existe un entier p tel que $n=4p+2$:

$S(n)=\dfrac{1-i^{4p+3}}{1-i}=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1^2+2i+i^2}{2}=\dfrac{2i}{2}$ $\boxed{S(n)=i}$.

Si n est un multiple de 4 plus 3[3], soit s'il existe un entier p tel que $n=4p+3$,

$S(n)=\dfrac{1-i^{4p+4}}{1-i}=\dfrac{1-1}{1-i}$ $\boxed{S(n)=0}$.

1 On dit aussi : si n est congru à 1 modulo 4, et on note : n≡1[4].
2 Si n est congru à 2 modulo 4 ou si n≡2[4]
3 Si n est congru à 3 modulo 4 ou si n≡3[4]