Problème 1 : f est définie sur $[1;9]$ par $\boxed{f(x)=2x-4\ln x}$. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f .

1) D'après l'allure du graphique, il semble que f soit convexe sur $[1;9]$. (courbe « en creux »)

2) a) f est dérivable sur $[1;9]$ (En tant que somme de fonctions qui le sont) et $\forall$ $x \in [1;9]$:
$f'(x)=2-4\times\dfrac{1}{x}$, soit $\boxed{f'(x)=2-\dfrac{4}{x}}$. Pour étudier le signe de $f'(x)$, on réduit son expression on même dénominateur : $\forall$ $x \in [1;9]$, $f'(x)=\dfrac{2\times x}{1\times x}-\dfrac{4}{x}$, soit $f'(x)=\dfrac{2x-4}{x}$.

x	1		2		9
$2x-4$		–	0	+	
x		+		+	
$f'(x)$		–	0	+	

b)

x	1		2		9
f	2	$\searrow$	$4-4\ln 2$	$\nearrow$	$18-4\ln 9$

$f(1)=2\times1-4\ln 1=2$ $\quad$ $f(2)=2\times2-4\ln 2=4-4\ln 2$ $\quad$ $f(9)=2\times9-4\ln 9=18-4\ln 9$

3) a) Pour calculer $f''(x)$, on peut partir de l'expression $f'(x)=2-\dfrac{4}{x}$ ou $f'(x)=\dfrac{2x-4}{x}$.

- Avec l'expression $2-\dfrac{4}{x}$: $f'(x)$ est de la forme $2-4\times\dfrac{1}{x}$, donc pour tout x de $[1;9]$, $f''(x)=0-4\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$, soit $\boxed{f''(x)=\dfrac{4}{x^2}}$.
- Avec l'expression $\dfrac{2x-4}{x}$: $f'(x)$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=2x-4$, $u'(x)=2$, $v(x)=x$ et $v'(x)=1$. Donc pour tout x de $[1;9]$, $f''(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}$,
Soit $f''(x)=\dfrac{2\times x-1\times(2x-4)}{x^2}=\dfrac{2x-2x+4}{x^2}$, soit $\boxed{f''(x)=\dfrac{4}{x^2}}$.

b) Pour tout x de $[1;9]$, $x>0$ donc $x^2>0$, donc, d'après la règle des signes, $f''(x)>0$. f est donc bien convexe sur $[1;9]$.

4) a) T est la tangente à la courbe représentative de f en son point A d'abscisse e . Pour déterminer une équation de T, on calcule $\boxed{f(\mathrm{e})=2\mathrm{e}-4\ln\mathrm{e}=2\mathrm{e}-4}$ et $\boxed{f'(\mathrm{e})=\dfrac{2\mathrm{e}-4}{\mathrm{e}}}$. $f'(\mathrm{e})$ est le coefficient directeur de (T).

- Si on connaît la formule de l'équation de la tangente[1] : une équation de (T) est $y=f'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e})+f(\mathrm{e})$.

soit $y=\dfrac{2\mathrm{e}-4}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})+(2\mathrm{e}-4)$ soit $y=(2\mathrm{e}-4)\left(\dfrac{x-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}+1\right)$ soit $y=(2\mathrm{e}-4)\left(\dfrac{x-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}+\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right)$, soit $\boxed{y=\dfrac{2\mathrm{e}-4}{\mathrm{e}}x}$.

1 Si f est dérivable en a , une équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse a est $\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$.

- Si on ne connaît pas par cœur cette formule, on utilise le fait que le coefficient directeur de (T) est $\dfrac{2\mathrm{e}-4}{\mathrm{e}}$ et que (T) passe par le point $\mathrm{A}(\mathrm{e};2\mathrm{e}-4)$.

Comme (T) admet pour coefficient directeur $\dfrac{2\mathrm{e}-4}{\mathrm{e}}$, son équation réduite est de la forme $y=\dfrac{2\mathrm{e}-4}{\mathrm{e}}x+p$.

Comme (T) passe par $\mathrm{A}(\mathrm{e};2\mathrm{e}-4)$, on a $y_{\mathrm{A}}=\dfrac{2\mathrm{e}-4}{\mathrm{e}}x_{\mathrm{A}}+p$,

soit $2\mathrm{e}-4=\dfrac{2\mathrm{e}-4}{\mathrm{e}}\times\mathrm{e}+p \Leftrightarrow 2\mathrm{e}-4=2\mathrm{e}-4+p \Leftrightarrow 0=p$.

L'ordonnée à l'origine de (T) est 0. Son équation réduite est $\boxed{y=\dfrac{2\mathrm{e}-4}{\mathrm{e}}x}$.

b) Le résultat qui nous donne la position relative de la courbe et de la tangente sur $[1;9]$ est l'étude de la convexité de f vue à la question 3 : lorsqu'une fonction est dérivable et convexe, sa courbe est située au-dessus de chacune de ses tangentes (théorème du cours sur la convexité).
Comme f est convexe sur $[1;9]$, $\mathscr{C}$ est située au-dessus de (T), excepté en A qui est le point commun de (T) et $\mathscr{C}$.

Problème 2 : Pour tout x de $[0{,}5;8]$, $\boxed{f(x)=(\ln x)(2-\ln x)}$. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f.

1) a) Pour tout x de $[0{,}5;8]$, $f(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)$. avec $u(x)=\ln x$, $u'(x)=\dfrac{1}{x}$,
$v(x)=2-\ln x$ et $v'(x)=-\dfrac{1}{x}$. Comme u et v sont dérivables sur $[0{,}5;8]$, f l'est aussi, et pour tout x de $[0{,}5;8]$, on a : $f'(x)=u'(x)v(x)\times v'(x)u(x)$, soit $f'(x)=\dfrac{1}{x}(2-\ln x)+\left(-\dfrac{1}{x}\ln x\right)=\dfrac{2-2\ln x}{x}$, soit
$f'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x}$, ou encore $\boxed{f'(x)=\dfrac{-2(\ln x-1)}{x}}$.

b) $\ln x-1\geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x\geqslant 1 \Leftrightarrow \ln x\geqslant \ln\mathrm{e} \Leftrightarrow x\geqslant\mathrm{e}$ car la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Comme on résout dans $[0{,}5;8]$, $\boxed{\mathrm{S}=[\mathrm{e};8]}$.

c)

x	0,5		e		8
-2		$-$		$-$	
$\ln x-1$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-1{,}87$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-0{,}17$

$f(\mathrm{e})=\ln\mathrm{e}(2-\ln\mathrm{e})=1(2-1)=1$ $\quad f(0{,}5)=\ln 0{,}5(2-\ln 0{,}5)=-\ln 2(2+\ln 2)\approx-1{,}87$.
$f(8)=\ln 8(2-\ln 8)=\ln(2^3)(2-\ln(2^3))=3\ln 2(1-3\ln 2)\approx-0{,}17$

2) Remarque : le théorème des valeurs intermédiaires, à la lecture du tableau de variations de f, nous indique que l'équation $f(x)=0$ doit admettre une solution dans $]0{,}5;\mathrm{e}[$ et une autre dans $]\mathrm{e};8[$.

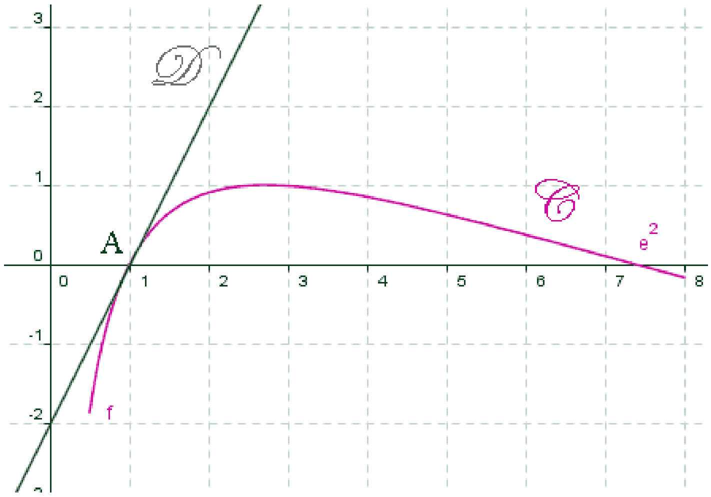
Résolvons numériquement l'équation $f(x)=0$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow (\ln x)(2-\ln x)=0 \Leftrightarrow \ln x=0$ ou $2-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=0$ ou $2=\ln x$

$\Leftrightarrow \ln x=\ln 1$ ou $e^2=e^{\ln x} \Leftrightarrow x=1$ ou $x=e^2$. $\boxed{S=\{1;e^2\}}$.

<u>Interprétation graphique</u> : La courbe $\mathscr{C}$ coupe donc l'axe des abscisses en deux points, son point d'abscisse 1 et son point d'abscisse e^2.

3) $\mathscr{D}$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point A d'abscisse 1. L'ordonnée du point A est 0 (puisqu'on vient de voir que 1 est l'une des solutions de l'équation $f(x)=0$) et le coefficient directeur de $\mathscr{D}$ est $f'(1)=\dfrac{-2(\ln 1-1)}{1}=-2(0-1)=2$.



- Si on connaît la formule d'une équation de la tangente : une équation de $\mathscr{D}$ sera :

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$, soit $y=2(x-1)+0$, soit $\boxed{y=2x-2}$.

- Si on ne connaît pas par cœur la formule :

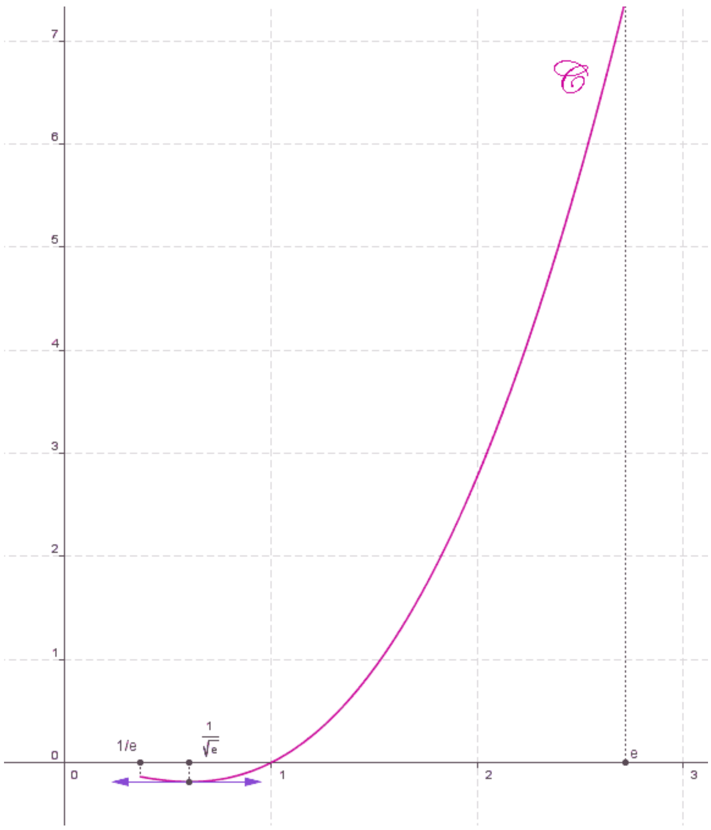
On sait que $\mathscr{D}$ a pour coefficient directeur 2, donc admet une équation réduite de la forme $y=2x+p$.
On sait que $\mathscr{D}$ passe par $A(1;0)$, donc que $y_A=2x_A+p$, soit $0=2\times 1+p \Leftrightarrow -2=p$.
Donc l'équation réduite de $\mathscr{D}$ est $\boxed{y=2x-2}$.

<u>Problème 3</u> : La fonction f est définie sur l'intervalle $I=\left[\dfrac{1}{e};e\right]$ par $\boxed{f(x)=x^2\ln x}$.

1) Pour tout x de I, $f(x)=u(x)v(x)$ avec $u(x)=x^2$ et $v(x)=\ln x$. u et v sont dérivables sur I, donc f l'est aussi, et pour tout x de I, on a $u'(x)=2x$, $v'(x)=\dfrac{1}{x}$ et

$f'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)=2x\ln x+\dfrac{1}{x}\times x^2$,

soit $f'(x)=2x\ln x+x$ ou encore $\boxed{f'(x)=x(2\ln x+1)}$.



2) a) Dans I, $2\ln x+1\geqslant 0 \Leftrightarrow 2\ln x\geqslant -1 \Leftrightarrow$

$\ln x\geqslant -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\ln x}\geqslant e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \boxed{x\geqslant e^{-\frac{1}{2}}}$.

<u>Remarque</u> : $\dfrac{1}{e}=e^{-1}$. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et comme $-1<-\dfrac{1}{2}<1$, $e^{-1}<e^{-\frac{1}{2}}<e$, donc $e^{-\frac{1}{2}}$ se situe dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{e};e\right[$.

C'est pourquoi, dans I, l'ensemble des solutions de l'inéquation $2\ln x+1\geqslant 0$ est $\boxed{S=\left[e^{-\frac{1}{2}};e\right]}$.

b) Remarque : $e^{-1}>0$ puisque pour tout réel x, $e^x>0$. C'est pourquoi x est toujours strictement positif sur l'intervalle $I=\left[\frac{1}{e};e\right]$.

x	$\frac{1}{e}$ ou e^{-1}		$e^{-\frac{1}{2}}$		e
$2\ln x+1$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

3) a) $f\left(\frac{1}{e}\right)=f(e^{-1})=(e^{-1})^2\times\ln(e^{-1})=e^{-2}\times(-1)=-e^2$ $\boxed{f\left(\frac{1}{e}\right)=-e^2}$

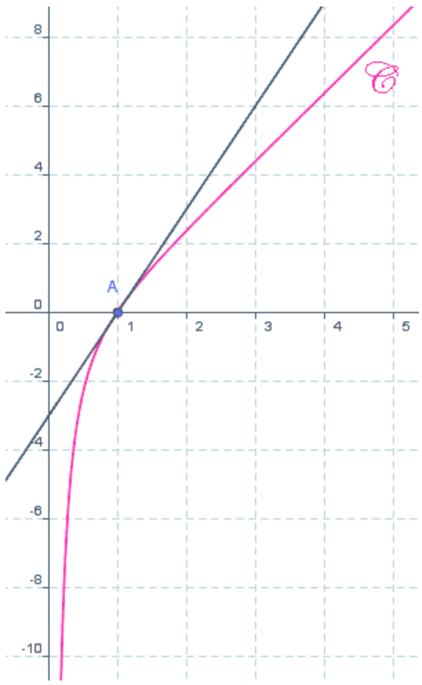
Remarque : $\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}=e^{-\frac{1}{2}}$ Donc $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2\times\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=e^{-1}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2e}$ $\boxed{f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}}$

$f(e)=e^2\times\ln e=e^2\times1=e^2$ $\boxed{f(e)=e^2}$.

b)	x	$\frac{1}{e}$		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		e
	f	$-e^2$	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	e^2

Problème 4 : f définie sur $I=]0;+\infty[$ par $\boxed{f(x)=ax+b+\frac{1}{x}\ln x}$, où a et b sont deux réels.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
$A(1;0)$ est un point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à la droite d'équation $y=3x+2$.



1) Pour tout x de I, $f(x)=ax+b+u(x)\times v(x)$
avec $\boxed{u(x)=\frac{1}{x}}$ et $\boxed{v(x)=\ln x}$.

u et v sont dérivables sur I, et pour tout $x\in$ I,
$\boxed{u'(x)=-\frac{1}{x^2}}$ et $\boxed{v'(x)=\frac{1}{x}}$.

Donc f est dérivable sur I et pour tout $x\in$ I,
$f'(x)=a+u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$,
Soit $f'(x)=a+\left(-\frac{1}{x^2}\right)\times\ln x+\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}=a-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}$, soit

$$\boxed{f'(x)=\frac{ax^2-\ln x+1}{x^2}}$$

2) a) L'énoncé indique que la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 est parallèle à la droite d'équation $y=3x+2$. Cela signifie que le coefficient directeur de cette tangente est 3, donc que $f'(1)=3$.

Or, d'après l'expression de $f'(x)$ pour tout x de I, $f'(1)=\dfrac{a\times 1^2-\ln 1+1}{1^2}=a+1$. Donc $\boxed{a+1=3}$.

b) La courbe $\mathscr{C}$, représentative de f , passe par le point $\mathrm{A}(1;0)$.

Donc $f(1)=0$. Or, d'après l'expression de $f(x)$ pour tout x de I, $f(1)=a\times 1+b+\dfrac{1}{1}\ln 1=a+b$.

D'où $\boxed{a+b=0}$.

3) Calculons a et b à partir des deux relations $a+1=3$ et $a+b=0$.

$a+1=3 \Leftrightarrow a=2$ Comme $a+b=0$ et $a=2$, $2+b=0$ donc $b=-2$.

Donc pour tout $x \in$ I, $\boxed{f(x)=2x-2+\dfrac{1}{x}\ln x}$.

Problème 5 : 1) g est la fonction définie sur ℝ par $\boxed{g(x)=x\mathrm{e}^x+1}$.

a) Pour tout x de ℝ, $g(x)$ est de la forme $u(x)v(x)+1$ avec $\boxed{u(x)=x}$ et $\boxed{v(x)=\mathrm{e}^x}$.

u et v sont dérivables sur ℝ, donc f aussi. Pour tout $x \in$ ℝ, $\boxed{u'(x)=1}$ et $\boxed{v'(x)=\mathrm{e}^x}$.

Donc $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=1\times\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x$, donc $\boxed{f'(x)=(1+x)\mathrm{e}^x}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	

b) $g(-1)=-1\mathrm{e}^{-1}+1=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}+1=\dfrac{-1+\mathrm{e}}{\mathrm{e}}=\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$. Comme $\mathrm{e}>2$, $\mathrm{e}-1>0$ et $\mathrm{e}>0$ donc $g(-1)>0$.

Comme $g(-1)$ est le minimum absolu de g sur ℝ (d'après le tableau de variations de g), on peut en déduire que pour tout $x \in$ ℝ, $g(x)>0$. (donc $g(x)\geqslant 0$)

2) f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\boxed{f(x)=\mathrm{e}^x+\ln x}$.

a) f est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$, et pour tout x de $]0;+\infty[$, on a $f'(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x}$, soit $\boxed{f'(x)=\dfrac{x\mathrm{e}^x+1}{x}}$, soit $\boxed{f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}}$.

b) Pour tout x d $]0;+\infty[$, $g(x)>0$ et $x>0$, donc $f'(x)>0$, donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Problème 6 : Le plan est muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

Partie A : g est définie sur $]1;+\infty[$ par $\boxed{g(x)=ax+\dfrac{b}{\ln x}}$. (Γ) est la courbe représentative de g .

On sait que :

- (Γ) passe par $\mathrm{E}(\mathrm{e};0)$ (Puisqu'on veut que (Γ) coupe l'axe des abscisses en son point E d'abscisse e), donc $\boxed{g(\mathrm{e})=0}$.

- La tangente à (Γ) en E est parallèle à la droite d'équation $y=2x$, donc a pour coefficient directeur 2. Donc $\boxed{g'(\mathrm{e})=2}$.

Calculons $g'(x)$ pour tout x de $]1;+\infty[$: Pour tout x de $]1;+\infty[$, $g(x)=ax+\frac{b}{\ln x}$, donc $g(x)$ est de la forme $ax+b\times\left(\frac{1}{v(x)}\right)$, avec $\boxed{v(x)=\ln x}$ (qui ne s'annule pas sur $]1;+\infty[$ car pour tout x de $]1;+\infty[$, $x\neq 1$ donc $\ln x\neq 0$). v est dérivable sur $]1;+\infty[$ et pour tout x de $]1;+\infty[$, $\boxed{v'(x)=\frac{1}{x}}$, et comme v ne s'annule pas sur $]1;+\infty[$, g est dérivable sur $]1;+\infty[$,

et pour tout x de $]1;+\infty[$, $g'(x)=a+b\times\frac{-v'(x)}{[v(x)]^2}$, soit $g'(x)=a+b\times\frac{-\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$, soit

$\boxed{g'(x)=a-\frac{b}{x\times(\ln(x))^2}}$.

Traduisons maintenant nos deux informations pour calculer a et b :

$\boxed{g(\mathrm{e})=0} \Leftrightarrow ae+\frac{b}{\ln \mathrm{e}}=0 \Leftrightarrow ae+\frac{b}{1}=0 \Leftrightarrow ea+b=0 \Leftrightarrow \boxed{b=-ea}$.

$\boxed{g'(\mathrm{e})=2} \Leftrightarrow a-\frac{b}{\mathrm{e}\times(\ln \mathrm{e})^2}=2 \Leftrightarrow \boxed{a-\frac{b}{\mathrm{e}}=2}$

Comme $b=-ea$, la relation $a-\frac{b}{\mathrm{e}}=2$ peut s'écrire :

$a-\frac{-ea}{a}=2 \Leftrightarrow a+\frac{ea}{\mathrm{e}}=2 \Leftrightarrow a+a=2 \Leftrightarrow 2a=2 \Leftrightarrow \boxed{a=1}$

Comme $b=-ea$, $b=-\mathrm{e}\times 1$, donc $\boxed{b=-\mathrm{e}}$.

Pour tout x de $]1;+\infty[$, $\boxed{g(x)=x-\frac{\mathrm{e}}{\ln x}}$.

Partie B : f est définie sur $]1;+\infty[$ par $\boxed{f(x)=x-\frac{\mathrm{e}}{\ln x}}$.

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans le repère $(\mathrm{O};\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}})$.

1) a) Pour tout x de $]1;+\infty[$, $f(x)$ est de la forme $x-\frac{\mathrm{e}}{v(x)}$, avec $\boxed{v(x)=\ln x}$.

v est dérivable sur $]1;+\infty[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle. Pour tout x de $]1;+\infty[$, $\boxed{v'(x)=\frac{1}{x}}$.

Donc f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et, pour tout x de $]1;+\infty[$, $f'(x)=1-\mathrm{e}\times\frac{-v'(x)}{[v(x)]^2}=1+\mathrm{e}\times\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}$,

soit $f'(x)=1+\mathrm{e}\times\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$, soit $\boxed{f'(x)=1+\frac{\mathrm{e}}{x\times(\ln x)^2}}$.

b) Pour tout x de $]1;+\infty[$, $x>0$, $\ln x>0$ puisque $x>1$, $\mathrm{e}>0$, donc, d'après la règle des signes,

$\dfrac{e}{x\times(\ln x)^2}>0$, donc $1+\dfrac{e}{x\times(\ln x)^2}>1$, donc $f'(x)>0$. f est donc strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

x	1	$+\infty$
f	$\nearrow$	

2) Donner une équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse e .

$f(e)=e-\dfrac{e}{\ln e}=e-e$ donc $\boxed{f(e)=0}$. $f'(e)=1+\dfrac{e}{e\times(\ln e)^2}=1+\dfrac{e}{e\times 1^2}=1+\dfrac{e}{e}$, donc $\boxed{f'(e)=2}$.

Une équation de (T), tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse e est :
$y=f'(e)(x-e)+f(e)$, soit $y=2(x-e)+0$, soit $\boxed{y=2x-2e}$.

Ou, si on ne connaît pas cette formule par cœur : le coefficient directeur de (T) est $f'(e)=2$.
Donc (T) admet une équation réduite de la forme $y=2x+p$.
Et comme $f(e)=0$, (T) passe par le point de coordonnées $(e;0)$, donc $0=2e+p \Leftrightarrow -2e=p$.
Donc l'équation réduite de (T) est $\boxed{y=2x-2e}$.

3) Pour tracer $\mathscr{C}$, établissons un tableau de valeurs (arrondies ici à 10^{-2} près) :

x	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	$e\approx 2{,}72$	2,8	3	3,5	4
$f(x)$	-13,70	-6,68	-4,18	-2,82	-1,92	-1,24	-0,7	-0,24	0	0,16	0,52	1,33	2,04

x	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5
$f(x)$	2,69	3,31	3,91	4,48	5,05	5,6	6,15	6,7	7,23	7,76	8,29	8,81	9,34

Construire dans $(O;\vec{i},\vec{j})$ les droites (D) et (T) et la courbe $\mathscr{C}$.

La droite (D) a pour équation $y=2x$, donc elle passe par O et par le point de coordonnées (4;8) (puisque $8=2\times 4$)

Pour (T), d'équation $y=2x-2e$, on sait qu'elle passe par $E(e;0)$. On peut calculer une valeur approchée de l'ordonnée de son point d'absisse 7 : $2\times 7-2e\approx 8{,}56$ et de son point d'abscisse 0 : $2\times 0-2e\approx -5{,}44$.

Graphique : voir l'annexe.

Problème 7 : Partie A : f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\boxed{f(x)=x^2+4-8\ln x}$.

1) f est une somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$, et pour tout x de $]0;+\infty[$, $\boxed{f'(x)=2x-\dfrac{8}{x}}$.

$f'(x)=\dfrac{2x^2}{x}-\dfrac{8}{x}$, $f'(x)=\dfrac{2x^2-8}{x}$, $f'(x)=\dfrac{2(x^2-4)}{x}$, $\boxed{f'(x)=\dfrac{2(x-2)(x+2)}{x}}$.

2)

x	0		2		$+\infty$
2		$+$		$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$+$		$+$	
x	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$\searrow$	$8(1-\ln 2)$	$\nearrow$	

$f(2)=2^2+4-8\ln 2=8-8\ln 2=8(1-\ln 2)$

Comme $e>2$, $\ln e>\ln 2$, soit $1>\ln 2$, donc $1-\ln 2>0$. On a donc $f(2)>0$.

Le minimum de f sur $]0;+\infty[$ est strictement positif, donc f est à valeurs strictement positives sur $]0;+\infty[$.

Partie B :

1) D'après l'étude de f, le prix de l'action est minimal pour $x=2$. $décembre\,2011+2\,mois=février\,2012$.
C'est en février 2012 qu'il est le plus judicieux d'acheter ces actions.

2) La dépense de l'investisseur, en dizaine d'euros, sera de
$2500\times f(2)=2500\times 8(1-\ln 2)=20\,000(1-\ln 2)\approx 6137,1$.

La dépense de l'investisseur, arrondie à l'euro, sera de 61 371 €.