Terminale ES – Exercices variés sur le chapitre des logarithmes. - Corrigés

Exercice 1 : a) $\ln 3+2\ln 9=\ln 3+2\ln 3^2=\ln 3+2\times 2\ln 3=\ln 3+4\ln 3=\boxed{5\ln 3}$

b) $\ln 7+\ln 5+\ln\left(\dfrac{1}{35}\right)=\ln 7+\ln 5+\ln\left(\dfrac{1}{7\times 5}\right)=\ln 7+\ln 5-\ln(7\times 5)=\ln 7+\ln 5-(\ln 7+\ln 5)=\boxed{0}$

c) $\ln 12-\ln 6+\ln 2=\ln(2\times 6)-\ln 6+\ln 2=\ln 2+\ln 6-\ln 6+\ln 2=\boxed{2\ln 2}$

d) $\ln\left(\dfrac{16}{9}\right)-\ln 16+\ln 9=\ln 16-\ln 9-\ln 16+\ln 9=\boxed{0}$

Exercice 2 : 1) $A=\dfrac{1}{2}\ln 16=\dfrac{1}{2}\ln(2^4)=\dfrac{1}{2}\times 4\ln 2$ $\boxed{A=2\ln 2}$

$B=\ln\left(\dfrac{1}{32}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{2^5}\right)=\ln(2^{-5})$ $\boxed{B=-5\ln 2}$

2) $C=\ln 1000=\ln(10^3)=3\ln 10=3\ln(2\times 5)=3(\ln 2+\ln 5)$ $\boxed{C=3\ln 2+3\ln 5}$

$D=\ln\left(\dfrac{8}{25}\right)=\ln 8-\ln 25=\ln(2^3)-\ln(5^2)$ $\boxed{D=3\ln 2-2\ln 5}$

$E=\ln(0{,}025)=\ln(25\times 10^{-3})=\ln 25+\ln(10^{-3})=\ln(5^2)-3\ln 10=2\ln 5-3\ln(2\times 5)=2\ln 5-3(\ln 2+\ln 5)$

$E=2\ln 5-3\ln 2-3\ln 5$ $\boxed{E=-3\ln 2-\ln 5}$

Exercice 3 : 1) a) $\boxed{\ln(x-1)-\ln(2x)=0}$. Nommons (E_1) cette équation.

- Recherche de l'ensemble de définition de (E_1) :

(E_1) est définie lorsque $x-1>0$ et $2x>0$.
Or $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ et $2x>0 \Leftrightarrow x>0$.
Pour que (E_1) soit définie, on doit donc avoir $x>1$ et $x>0$, donc x ∈ $\boxed{]1;+\infty[}$.

- Résolution de (E_1) dans $]1;+\infty[$:

$(E_1) \Leftrightarrow \ln(x-1)=\ln(2x) \Leftrightarrow x-1=2x$ car pour tous a et b de $]0;+\infty[$, $a=b \Leftrightarrow \ln a=\ln b$.
$(E_1) \Leftrightarrow -1=x \Leftrightarrow x=-1$. Or -1 ne fait pas partie de l'ensemble de définition de l'équation. Donc $\boxed{S=\emptyset}$.

b) $\boxed{\ln(1+3x)=\ln(x+1)}$ Nommons (E_2) cette équation.

- Recherche de l'ensemble de définition de (E_2) :

(E_2) est définie lorsque $1+3x>0$ et lorsque $x+1>0$.

$1+3x>0 \Leftrightarrow 3x>-1 \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{3}$ $\qquad x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

On doit donc avoir à la fois $x>-\dfrac{1}{3}$ et $x>-1$, donc x doit appartenir à l'intervalle $\boxed{\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[}$.

- Résolution de (E_2) dans $\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$:

$(E_2) \Leftrightarrow 1+3x=x+1 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$.

0 appartient bien à l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$, donc $\boxed{S=\{0\}}$.

c) $\boxed{\ln(4-x)-1=0}$. Nommons (E_3) cette équation.

- Recherche de l'ensemble de définition de (E_3) :

(E_3) est définie lorsque $4-x>0 \Leftrightarrow 4>x \Leftrightarrow x<4$. (E_3) est donc définie sur $\boxed{]-\infty;4[}$.

- Résolution de (E_3) dans $]-\infty;4[$:

$(E_3) \Leftrightarrow \ln(4-x)=1 \Leftrightarrow \ln(4-x)=\ln e \Leftrightarrow 4-x=e \Leftrightarrow 4-e=x$.

Comme e>0, $4-e<4$. Donc $4-e \in]-\infty;4[$. Donc $\boxed{S=\{4-e\}}$.

2) a) $\boxed{\ln(2x-1)>-1}$ Nommons (I_1) cette inéquation.

- Recherche de l'ensemble de définition de (I_1) :

(I_1) est définie lorsque $2x-1>0 \Leftrightarrow 2x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$. (I_1) est définie sur $\boxed{\left]\frac{1}{2};+\infty\right[}$.

- Résolution de (I_1) sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$:

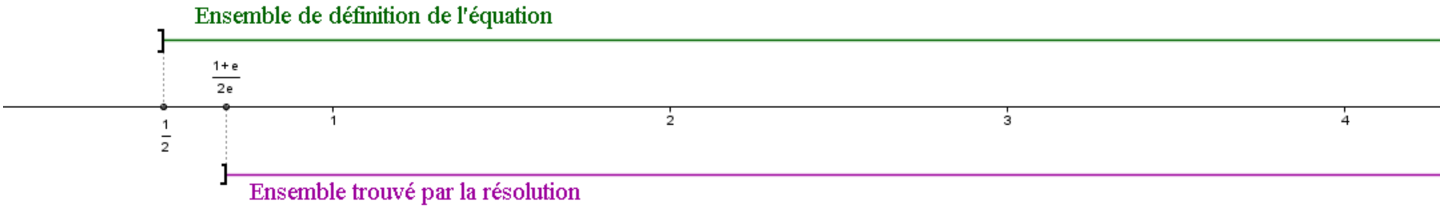
$(I_1) \Leftrightarrow \ln(2x-1)>-\ln e \Leftrightarrow \ln(2x-1)>\ln\left(\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow 2x-1>\frac{1}{e}$

Car pour tous a et b de $]0;+\infty[$, $\ln a \geqslant \ln b \Leftrightarrow a \geqslant b$.

<u>Remarque</u> : $2x-1$ appartient bien à $]0;+\infty[$ puisqu'on résout dans $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

$(I_1) \Leftrightarrow 2x>\frac{1}{e}+1 \Leftrightarrow 2x>\frac{1}{e}+\frac{e}{e} \Leftrightarrow 2x>\frac{1+e}{e} \Leftrightarrow \boxed{x>\frac{1+e}{2e}}$.

Or $\frac{1+e}{2e}=\frac{1}{2e}+\frac{e}{2e}=\frac{1}{2e}+\frac{1}{2}$ donc $\frac{1+e}{2e}>\frac{1}{2}$ (puisque $e>0$ donc $\frac{1}{2e}>0$)



Donc $\left]\frac{1+e}{2e};+\infty\right[\subset \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$. D'où $\boxed{S=\left]\frac{1+e}{2e};+\infty\right[}$.

b) $\boxed{\ln(x)\leqslant\ln(x^2-2x)}$ Nommons (I_2) cette inéquation.

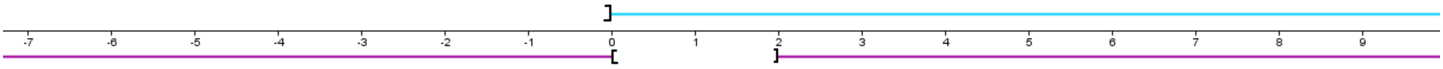
- Recherche de l'ensemble de définition de (I_2) :

(I_2) est définie lorsque $x>0$ et lorsque $x^2-2x>0$.

Pour connaître le signe de x^2-2x, remarquons que pour tout réel x, $x^2-2x=x(x-2)$ et établissons un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour que (I_2) soit définie, il faut donc que $x>0$ soit que $x\in$ $\boxed{]0;+\infty[}$
Et aussi que $x^2-2x>0$, c'est-à-dire que $x\in$ $\boxed{]-\infty;0[\cup]2;+\infty[}$



x doit appartenir à $\boxed{]0;+\infty[}\cap\boxed{]-\infty;0[\cup]2;+\infty[}$, c'est-à-dire $\boxed{]2;+\infty[}$.

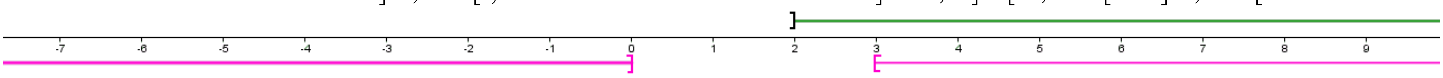
- Résolution de (I_2) dans $]2;+\infty[$:

(I_2) $\boxed{\ln(x)\leqslant\ln(x^2-2x)}$ $\Leftrightarrow$ $x\leqslant x^2-2x$ puisque pour tous a et b de $]0;+\infty[$, $a\leqslant b\Leftrightarrow\ln a\leqslant\ln b$.
$\Leftrightarrow$ $0\leqslant x^2-3x$ $\Leftrightarrow$ $0\leqslant x(x-3)$.

Si on résolvait cette dernière inéquation dans ℝ, on obtiendrait $\boxed{]-\infty;0]\cup[3;+\infty[}$ comme ensemble de solutions.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		–	0	+		+	
$x-3$		–		–	0	+	
$x(x-3)$		+	0	–	0	+	

Mais comme on résout dans $]2;+\infty[$, l'ensemble des solutions est $]-\infty;0]\cup[3;+\infty[\ \cap\ ]2;+\infty[$



Donc $\boxed{S=[3;+\infty[}$.

Exercice 4 : f est la fonction définie par $\boxed{f(x)=2\ln x+\ln(1-x)-\ln 2}$.

1) f est définie lorsque $\boxed{x>0}$ et lorsque $1-x>0\Leftrightarrow 1>x\Leftrightarrow\boxed{x<1}$.
Donc f est définie dans $\boxed{]0;1[}$.

2) Pour tout $x\in\ ]0;1[$, $f(x)=2\ln x+\ln(1-x)-\ln 2=\ln(x^2)+\ln(1-x)-\ln 2=\ln\left(\frac{x^2(1-x)}{2}\right)$.

Donc la fonction g telle que pour tout x de $]0;1[$, $f(x)=\ln g(x)$ est la fonction définie sur $]0;1[$ par
$\boxed{g(x)=\frac{x^2(1-x)}{2}}$.

Exercice 5 : f est une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\boxed{f(x)=ax+b+c\ln x}$, où a, b et c sont des réels.

Les renseignements que nous lisons sur la figure sont :

- $\boxed{f(1)=1}$, car le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1 a pour ordonnée 1.
- $\boxed{f(2)=2\ln 2}$, car le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2 a pour ordonnée $2\ln 2$.
- $\boxed{f'(2)=0}$ car la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 2 est horizontale.

Calculons la dérivée de f : f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout x de $]0;+\infty[$, on a :
$f'(x)=a+c\times\frac{1}{x}$, soit $f(x)=a+\frac{c}{x}$.

- $\boxed{f(1)=1}$ se traduit par $a\times 1+b+c\ln 1=1\Leftrightarrow a+b+c\times 0=1\Leftrightarrow\boxed{a+b=1}$ (R_1).
- $\boxed{f(2)=2\ln 2}$ se traduit par $a\times 2+b+c\ln 2=2\ln 2\Leftrightarrow\boxed{2a+b+c\ln 2=2\ln 2}$ (R_2).
- $\boxed{f'(2)=0}$ se traduit par $a+\frac{c}{2}=0\Leftrightarrow\boxed{2a+c=0}$ (R_3).

Exprimons b et c en fonction de a en nous servant des relations (R_1) et (R_3) :

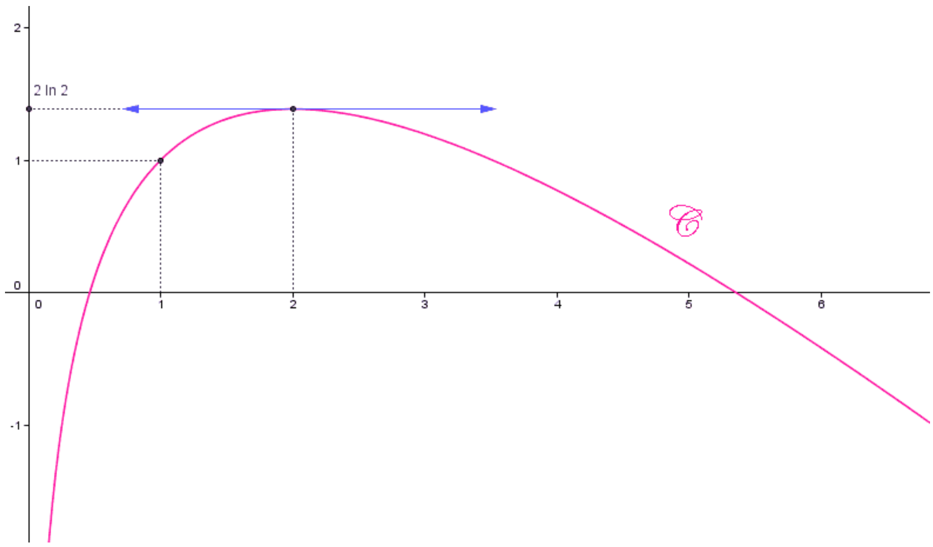
(R_1) $a+b=1 \Leftrightarrow \boxed{b=1-a}$.
(R_3) $2a+c=0 \Leftrightarrow \boxed{c=-2a}$

En remplaçant b et c par leurs valeurs en fonction de a dans (R_2), on trouve :

$$2a+(1-a)-2a\ln 2=2\ln 2 \Leftrightarrow a+1-2a\ln 2=2\ln 2 \Leftrightarrow a-2a\ln 2=2\ln 2-1 \Leftrightarrow a(1-2\ln 2)=2\ln 2-1$$
$$\Leftrightarrow a=\frac{2\ln 2-1}{1-2\ln 2} \Leftrightarrow a=\frac{2\ln 2-1}{-(2\ln 2-1)} \Leftrightarrow a=\frac{1}{-1}\,^{(1)} \Leftrightarrow \boxed{a=-1}.$$

On a donc $b=1-(-1)=1+1$ soit $\boxed{b=2}$, et $c=-2\times(-1)$, soit $\boxed{c=2}$.

La fonction f est donc définie sur $]0;+\infty[$ par $\boxed{f(x)=-x+2+2\ln x}$.



1 En simplifiant par $2\ln 2-1$ qui est non nul.