Terminale ES – Exercices : inéquations avec des logarithmes et des exponentielles – Corrigés

Exercice 1 : (I_1) $\boxed{\ln x \leqslant 3}$ $\ln x$ est défini si et seulement si $x > 0$. On résout donc (I_1) dans $\boxed{]0;+\infty[}$.

$(I_1) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln x} \leqslant \mathrm{e}^3$ On peut composer les deux membres par la fonction exponentielle, car la fonction exponentielle est strictement croissante donc conserve l'ordre sur IR.

$(I_1) \Leftrightarrow x \leqslant \mathrm{e}^3$. x doit être dans $]0;+\infty[$ et vérifier $x \leqslant \mathrm{e}^3$. Donc $\boxed{S =]0;\mathrm{e}^3]}$.

(I_2) $\boxed{\mathrm{e}^x > 2}$ L'équation est définie sur IR car la fonction exponentielle est elle-même définie sur IR.

$(I_2) \Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}^x) > \ln 2$ car e^x et 2 sont deux réels strictement positifs. On peut donc composer les deux membres de l'inéquation par la fonction logarithme népérien qui conserve l'ordre sur $]0;+\infty[$ puisqu'elle est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$(I_2) \Leftrightarrow x > \ln 2$. Donc $\boxed{S =]\ln 2;+\infty[}$.

(I_3) $\boxed{\ln x > \mathrm{e}}$ $\ln x$ est défini si et seulement si $x > 0$. On résout donc (I_3) dans $\boxed{]0;+\infty[}$.

$(I_3) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln x} > \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante donc conserve l'ordre sur IR.
$(I_3) \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$. Comme tout x de $]\mathrm{e}^{\mathrm{e}};+\infty[$ est dans $]0;+\infty[$ [1], $\boxed{S =]\mathrm{e}^{\mathrm{e}};+\infty[}$.

(I_4) $\boxed{\mathrm{e}^x \leqslant 3}$. La fonction exponentielle est définie sur IR, donc cette inéquation aussi. On la résout dans IR.

$(I_4) \Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}^x) \leqslant \ln(3)$. On peut composer par la fonction logarithme népérien car les deux membres e^x et 3 sont strictement positifs et car la fonction logarithme népérien est strictement croissante donc conserve l'ordre sur $]0;+\infty[$. $(I_4) \Leftrightarrow x \leqslant \ln 3$ $\boxed{S =]-\infty;\ln 3[}$

(I_5) $\boxed{\mathrm{e}^{5x} > 3}$. La fonction exponentielle est définie sur IR, donc cette inéquation aussi, puisque lorsque $x \in$ IR, $5x \in$ IR. On résout donc (I_5) dans IR.

$(I_5) \Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}^{5x}) > \ln 3$ On peut composer les deux membres par la fonction logarithme népérien car e^{5x} et 3 sont strictement positifs et car la fonction logarithme népérien est strictement croissante donc conserve l'ordre sur $]0;+\infty[$.

$(I_5) \Leftrightarrow 5x > \ln 3 \Leftrightarrow x > \dfrac{\ln 3}{5}$ $\boxed{S = \left]\dfrac{\ln 3}{5};+\infty\right[}$

(I_6) $\boxed{\mathrm{e}^{x-1} < 2}$. La fonction exponentielle est définie sur IR, donc cette inéquation aussi.

$(I_6) \Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}^{x-1}) < \ln 2$ On peut composer par la fonction logarithme népérien car les deux membres e^{x-1} et 3 sont strictement positifs et car la fonction logarithme népérien est strictement croissante donc conserve l'ordre sur $]0;+\infty[$. $(I_6) \Leftrightarrow x-1 < \ln 2 \Leftrightarrow x < \ln 2 + 1$ $\boxed{S =]-\infty;\ln 2+1[}$

(I_7) $\boxed{\ln(2x-1) > -1}$ L'inéquation est définie lorsque $2x-1 > 0 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$.

1 On dit aussi que l'intervalle $]0;+\infty[$ est inclus dans $]0;+\infty[$, ce qui se note $]\mathrm{e}^{\mathrm{e}};+\infty[\subset]0;+\infty[$.

On résout donc (I_7) dans $\boxed{\left]\frac{1}{2};+\infty\right[}$.

$(\mathrm{I}_7) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln(2x-1)} > \mathrm{e}^{-1}$: on peut composer les deux membres par la fonction exponentielle car celle-ci est strictement croissante donc elle conserve l'ordre sur $\mathbb{R}$.

$(\mathrm{I}_7) \Leftrightarrow 2x-1 > \frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow 2x > \frac{1}{\mathrm{e}}+1 \Leftrightarrow 2x > \frac{1}{\mathrm{e}}+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow x > \frac{1+\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}$.

Pour connaître l'ensemble des solutions de (I_7), il faut comparer $\frac{1+\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}$ à $\frac{1}{2}$, afin de savoir lequel des deux intervalles $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ ou $\left]\frac{1+\mathrm{e}}{2\mathrm{e}};+\infty\right[$ est inclus dans l'autre.

$\frac{1+\mathrm{e}}{2\mathrm{e}} = \frac{\left(\frac{1}{\mathrm{e}}+1\right)\mathrm{e}}{2\mathrm{e}} = \frac{\frac{1}{\mathrm{e}}+1}{2} = \frac{1}{2\mathrm{e}}+\frac{1}{2}$. Comme $\mathrm{e}>0$, $\frac{1}{2\mathrm{e}}>0$, donc $\frac{1}{2\mathrm{e}}+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$, soit $\frac{1+\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}>\frac{1}{2}$

Donc $\boxed{S=\left]\frac{1+\mathrm{e}}{2\mathrm{e}};+\infty\right[}$.

(I_8) $\boxed{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\geqslant \ln 3}$ (I_8) est définie lorsque $\frac{2}{x}$ est défini, donc pour $x\neq 0$, et lorsque $1+\frac{2}{x}>0$.

$1+\frac{2}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{x}{x}+\frac{2}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x}>0$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$1+\frac{2}{x}=\frac{x+2}{x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

On a donc $\frac{x+2}{x}>0$ lorsque $x\in \left]-\infty;-2\right[\cup\left]0;+\infty\right[$.

(I_8) est donc définie pour $x\in$ $\boxed{\left]-\infty;-2\right[\cup\left]0;+\infty\right[}$. On la résout dans cet ensemble.

$(\mathrm{I}_8) \Leftrightarrow 1+\frac{2}{x}\geqslant 3$ (car $a\geqslant b \Leftrightarrow \ln(a)\geqslant\ln(b)$ puisque la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et car $1+\frac{2}{x}$ et 3 sont dans $\mathbb{R}^{+*}$ d'après l'ensemble de définition de l'inéquation)

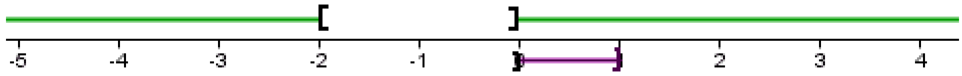
$(\mathrm{I}_8) \Leftrightarrow -2+\frac{2}{x}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{x}+\frac{2}{x}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+2}{x}\geqslant 0$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-2x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-2x+2}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{-2x+2}{x}\geqslant 0$ serait $\left]0;1\right]$.

Mais comme nous résolvons dans $]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$, l'ensemble des solutions de (I_8) est l'intersection de $\boxed{]0;1]}$ et de $\boxed{]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[}$. (que l'on peut noter $]0;1]\cap(]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[)$)

<u>Rappel</u> : l'intersection de deux ensembles est constituée des éléments qui sont dans les deux ensembles à la fois. Ci-dessous, on garde ce qui est à la fois dans l'ensemble vert et dans l'ensemble violet.



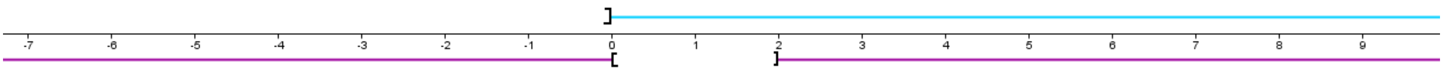
Donc $]0;1]\cap(]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[)=]0;1]$ $\boxed{S=]0;1]}$

(I_9) $\boxed{\ln x \leqslant \ln(x^2-2x)}$

(I_9) est définie lorsque $x>0$ et lorsque $x^2-2x>0$ ou $x(x-2)>0$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

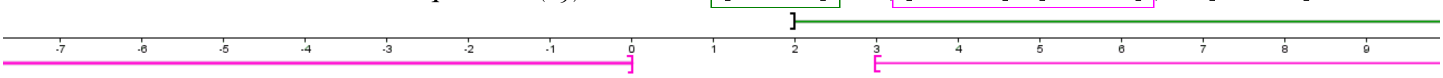
(I_9) est donc définie sur $\boxed{]0;+\infty[}\cap(\boxed{]-\infty;0[\cup]2;+\infty[})=]2;+\infty[$. On résout donc (I_9) dans $\boxed{]2;+\infty[}$.



$(\mathrm{I}_9) \Leftrightarrow x\leqslant x^2-2x \Leftrightarrow 0\leqslant x^2-3x \Leftrightarrow 0\leqslant x(x-3)$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I_9) est donc $\boxed{]2;+\infty[}\cap(\boxed{]-\infty;0]\cup[3;+\infty[})=[3;+\infty[$.



$\boxed{S=[3;+\infty[}$

(I_{10}) $\boxed{\frac{1}{2}\leqslant e^x\leqslant 2}$ La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, donc cette double inéquation aussi.

On peut composer les trois membres par la fonction logarithme népérien, puisque les 3 membres sont strictement positifs et que la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$:

$(\mathrm{I}_{10}) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant\ln(e^x)\leqslant\ln 2 \Leftrightarrow -\ln 2\leqslant x\leqslant\ln 2$. $\boxed{S=[-\ln 2;\ln 2]}$.

(I_{11}) $\boxed{\ln x+2\geqslant 0}$ Cette inéquation est définie sur $\boxed{]0;+\infty[}$, comme la fonction ln.

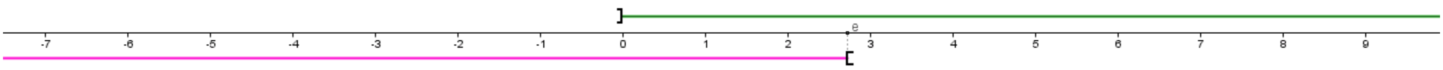
$(I_{11}) \Leftrightarrow \ln x \geqslant -2 \Leftrightarrow e^{\ln x} \geqslant e^{-2}$ (on peut composer les deux membres par la fonction exponentielle car celle-ci est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle conserve l'ordre sur $\mathbb{R}$.)

$(I_{11}) \Leftrightarrow x \geqslant e^{-2}$. Comme $e^{-2} > 0$, $[e^{-2};+\infty[\subset]0;+\infty[$, donc $\boxed{S=[e^{-2};+\infty[}$.

(I_{12}) $\boxed{\ln x - 1 < 0}$ Cette inéquation est définie sur $\boxed{]0;+\infty[}$, comme la fonction ln.

$(I_{12}) \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e$ Car $a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$ pour tous a et b de $]0;+\infty[$

L'ensemble des solutions de (I_{12}) est donc $\boxed{]0;+\infty[} \cap \boxed{]-\infty;e[} =]0;e[$. $\boxed{S=]0;e[}$

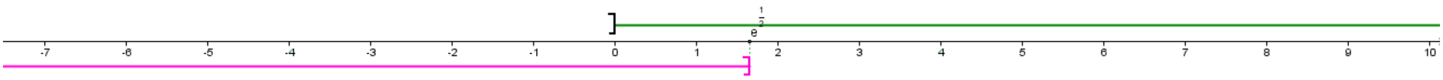


(I_{13}) $\boxed{2\ln x + 1 \leqslant 0}$ (I_{13}) est définie, comme la fonction ln, sur $\boxed{]0;+\infty[}$. On la résout dans cet ensemble.

$(I_{13}) \Leftrightarrow 2\ln x \leqslant -1 \Leftrightarrow \ln x \leqslant -\dfrac{1}{2}$ On peut composer les deux membres par la fonction exponentielle car celle-ci est strictement croissante donc conserve l'ordre sur $\mathbb{R}$.

$(I_{13}) \Leftrightarrow e^{\ln x} \leqslant e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \leqslant e^{\frac{1}{2}}$.

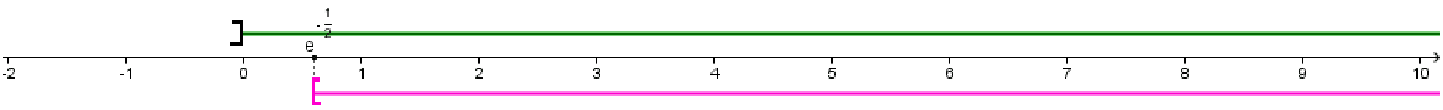
L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $\boxed{]0;+\infty[} \cap \boxed{\left]-\infty;e^{\frac{1}{2}}\right]}$, soit $S=\left]0;e^{\frac{1}{2}}\right]$.



(I_{14}) $\boxed{2\ln x + 1 \geqslant 0}$ (I_{14}) est définie, comme la fonction ln, sur $\boxed{]0;+\infty[}$. On la résout dans cet ensemble.

$(I_{14}) \Leftrightarrow 2\ln x \geqslant -1 \Leftrightarrow \ln x \geqslant -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\ln x} \geqslant e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \geqslant e^{-\frac{1}{2}}$.

Comme pour tout réel x, $e^x > 0$, on sait que $e^{-\frac{1}{2}} > 0$, $\boxed{]0;+\infty[} \cap \boxed{\left[e^{-\frac{1}{2}};+\infty\right[} = \left[e^{-\frac{1}{2}};+\infty\right[$.



Donc $\boxed{S=\left[e^{-\frac{1}{2}};+\infty\right[}$.

(I_{15}) $\boxed{\ln x + 4 \geqslant 0}$

(I_{15}) est définie sur $\boxed{]0;+\infty[}$, comme la fonction ln. Nous la résolvons dans cet ensemble.

$(I_{15}) \Leftrightarrow \ln x \geqslant -4 \Leftrightarrow e^{\ln x} \geqslant e^{-4} \Leftrightarrow x \geqslant e^{-4}$. De manière analogue à (I_{14}), on trouve $\boxed{S=[e^{-4};+\infty[}$

(I_{16}) $\ln x(2-\ln x) \geqslant 0$.

(I_{16}) est définie sur $\boxed{]0;+\infty[}$, comme la fonction ln. Nous la résolvons dans cet ensemble.

$\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$

et $2 - \ln x > 0 \Leftrightarrow 2 > \ln x \Leftrightarrow e^2 > e^{\ln x} \Leftrightarrow e^2 > x$.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$2-\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$\ln x(2-\ln x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc dans l'ensemble $]0;+\infty[$, $\ln x(2-\ln x)\geqslant 0$ lorsque $x\in [1;e^2]$. $\boxed{S=[1;e^2]}$.

Exercice 2 : 1) Résolvons l'inéquation $\boxed{-x^2-4x+5>0}$.

On considère le trinôme $-x^2-4x+5$. $\Delta=(-4)^2-4\times(-1)\times 5=16+20=36=6^2$.

Les deux racines du trinôme sont donc $x_1=\frac{4-6}{2\times(-1)}=\frac{-2}{-2}=1$ et $x_2=\frac{4+6}{2\times(-1)}=\frac{10}{-2}=-5$.

Comme le coefficient du terme de plus haut degré de ce trinôme est négatif (puisqu'il est égal à -1), on a :

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$-x^2-4x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2-4x+5>0$ est $\boxed{]-5;1[}$.

2) Nommons (I) l'inéquation $\boxed{\ln(-x^2-4x+5)+\ln\frac{1}{8}>0}$.

(I) est définie lorsque $-x^2-4x+5>0$, c'est-à-dire sur $]-5;1[$. Résolvons-la dans $]-5;1[$:

$(\mathrm{I})\Leftrightarrow \ln(-x^2-4x+5)>-\ln\left(\frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow \ln(-x^2-4x+5)>\ln(8)$ puisque l'inverse de $\frac{1}{8}$ est 8 et car pour tout $b\in\mathbb{R}^{+*}$, $\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln b$.

Donc $(\mathrm{I})\Leftrightarrow -x^2-4x+5>8 \Leftrightarrow -x^2-4x-3>0$.

Considérons le trinôme $-x^2-4x-3$. $\Delta=(-4)^2-4\times(-1)\times(-3)=16-12=4=2^2$.

Ce trinôme admet donc deux racines : $x_3=\frac{4-2}{2\times(-1)}=\frac{2}{-2}=-1$ et $x_4=\frac{4+2}{2\times(-1)}=\frac{6}{-2}=-3$.

Sur $\mathbb{R}$, le signe de $-x^2-4x-3$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$-x^2-4x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc, dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2-4x-3>0$ serait $]-3;-1[$.

Mais comme on résout (I) dans $]-5;1[$, l'ensemble des solutions de (I) est $]-5;1[\cap]-3;-1[=]-3;-1[$ aussi. Donc $\boxed{S=]-3;-1[}$.

Exercice 3 : 1) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)=-\ln e=-1$

2) L'inéquation (I) $(\ln x)^2+\ln x>0$ est définie sur $]0;+\infty[$, tout comme la fonction ln.
Pour tout x de $]0;+\infty[$, $(\ln x)^x+\ln x=\ln x(\ln x+1)$, donc $(\mathrm{I})\Leftrightarrow \ln x(\ln x+1)>0$.

Pour $x\in\mathbb{R}^{+*}$, $\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x>\ln 1 \Leftrightarrow x>1$ car la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$\ln x+1>0 \iff \ln x>-1 \iff \ln x>\ln\left(\frac{1}{e}\right) \iff x>\frac{1}{e}.$$

$2<e<3$ donc $\frac{1}{2}>\frac{1}{e}>\frac{1}{3}$ (car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ donc elle inverse l'ordre sur cet intervalle.) Ceci nous permet de savoir que $\frac{1}{e}$ est compris entre 0 et 1.

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$0 \qquad\qquad \frac{1}{e} \qquad\qquad 1 \qquad\qquad +\infty$
$\ln x$	$\Vert$
$\ln x+1$	

Exercice 4 : Chaque heure, la population de bactéries diminue de 5%, donc est multipliée par 0,95.
Si la population initiale est de A bactéries, au bout de n heures, la population de bactéries est de $A\times 0{,}95^n$.
On cherche le plus petit entier n tel que $A\times 0{,}95^n\leqslant\frac{A}{2}$ (inéquation I)

(I) $\iff$ $\boxed{0{,}95^n\leqslant\frac{1}{2}}$ en divisant les deux membres par A, qui est un nombre strictement positif.

(I) $\iff \ln(0{,}95^n)\leqslant\ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff n\ln 0{,}95\leqslant\ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff n\geqslant\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln 0{,}95}$.

Remarque : on change le sens de l'inégalité car $\ln 0{,}95$, par lequel on divise les deux membres, est un nombre strictement négatif car $0{,}95<1$.
(I) $\iff n\geqslant\frac{-\ln 2}{\ln 0{,}95}$. Avec $\frac{-\ln 2}{\ln 0{,}95}\approx 13{,}5134$.
Le plus petit entier n solution de cette inéquation est donc 14 : c'est au bout de **14 heures** que la population de bactéries aura diminué de moitié.

Si on cherche un résultat en heures et minutes : $0{,}5134\times 60=30{,}804$.
La population de bactéries aura diminué de moitié au bout de **13 heures et 31 minutes**.

Exercice 5 : 1) Soit P_0 la population initiale et P_n la population après n années.
Chaque année, la population diminue de 7%, donc est multipliée par 0,93.

Donc pour tout entier naturel n, on a $P_{n+1}=P_n\times 0{,}93$. (P_n) est une suite géométrique de premier terme P_0 est de raison 0,93. Donc pour tout n ∈ ℕ, $P_n=P_0\times 0{,}93^n$.

On cherche le plus petit entier n tel que $P_n\leqslant\frac{1}{4}\times P_0$, soit $P_0\times 0{,}93^n\leqslant\frac{1}{4}\times P_0 \iff 0{,}93^n\leqslant\frac{1}{4}$ puisque $P_0>0$ donc on peut diviser les deux membres de l'inéquation par P_0 sans changer son sens.

Résolvons l'inéquation (I_1) $\boxed{0{,}93^n\leqslant\frac{1}{4}} \iff \ln(0{,}93^n)\leqslant\ln\left(\frac{1}{4}\right) \iff n\ln 0{,}93\leqslant-\ln 4 \iff \boxed{n\geqslant\frac{-\ln 4}{\ln 0{,}93}}$.
(puisque $\ln 0{,}93<0$) $\frac{-\ln 4}{\ln 0{,}93}\approx 19{,}1027$.
Donc le plus petit entier n qui convient est 20 : c'est **au bout de 20 années** que la population de cette ville sera inférieure au quart de sa population initiale.

2) Une population augmente de 10 % par an. Au bout de combien d'années cette population aura-t-elle doublé ?

Soit $\mathrm{P_0}$ la population initiale et $\mathrm{P_n}$ la population au bout de n années.
Chaque année, la population augmente de 10 %, donc est multipliée par 1,1.
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $\mathrm{P_{n+1}=P_n\times 1{,}1}$. Donc $(\mathrm{P_n})$ est une suite géométrique de terme initial $\mathrm{P_0}$ et de raison 1,1, donc pour tout n, $\mathrm{P_n=P_0\times 1{,}1}^n$.

Pour savoir au bout de combien d'années cette population aura doublé, on cherche le plus petit entier n tel que
$\mathrm{P_n \geqslant 2P_0} \Leftrightarrow \mathrm{P_0\times 1{,}1}^n\geqslant 2\mathrm{P_0} \Leftrightarrow \boxed{1{,}1^n\geqslant 2}$ car $\mathrm{P_0}>0$.

$1{,}1^n\geqslant 2 \Leftrightarrow \ln(1{,}1^n)\geqslant \ln 2 \Leftrightarrow n\ln 1{,}1\geqslant \ln 2 \Leftrightarrow \boxed{n\geqslant\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}1}}$ car $\ln 1{,}1>0$ puisque $1{,}1>1$.

$\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}1}\approx 7{,}27254$. Donc c'est **au bout de 8 ans** que la population aura doublé.

Exercice 6 : 1) a est la proportion d'alcool contenue dans le mélange avant l'opération.
En litres, le mélange, avant l'opération, contient donc $100a$ L d'alcool.
On lui retire 1 L de mélange qui contient $1\times a=a$ L d'alcool.
Donc il reste dans les 99 L $100a-a=99a$ L d'alcool.
On ajoute 1 L d'eau : on a donc $99a$ L d'alcool pour 100 L de mélange.
Le titre du nouveau mélange est donc $\boxed{a'=\dfrac{99a}{100}=0{,}99a}$. C.Q.F.D.

2) Soit a_0 le titre initial et a_n le titre du mélange après n opérations (ou n jours).
Pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1}=0{,}99\,a_n$.
(a_n) est donc une suite géométrique de premier terme $a_0=90$ et de raison $0{,}99$.
Donc pour tout entier naturel n, $a_n=a_0\times 0{,}99^n$ soit $a_n=90\times 0{,}99^n$.
Au bout de n jours, le titre est donc égal à $\boxed{0{,}99^n\times 90}$.

3) a) (I) $\boxed{0{,}99^n\times 90<50} \Leftrightarrow 0{,}99^n<\dfrac{5}{9} \Leftrightarrow \ln(0{,}99^n)<\ln\left(\dfrac{5}{9}\right) \Leftrightarrow n\ln 0{,}99<\ln 5-\ln 9 \Leftrightarrow n>\dfrac{\ln 5-\ln 9}{\ln 0{,}99}$
car $0{,}99<1$ donc $\ln 0{,}99<0$.

Si on veut un résultat avec seulement des logarithmes de nombres entiers, on peut remarquer que
$\ln 0{,}99=\ln\left(\dfrac{99}{100}\right)=\ln 99-\ln 100$. Donc (I) $\Leftrightarrow n>\dfrac{\ln 5-\ln 9}{\ln 99-\ln 100}$ avec $\dfrac{\ln 5-\ln 9}{\ln 99-\ln 100}\approx 58{,}4843$.

$$\boxed{\mathrm{S}=\left]\dfrac{\ln 5-\ln 9}{\ln 99-\ln 100};+\infty\right[}$$

b) C'est au bout de **59 jours** que le mélange titrera moins de 50° d'alcool.

Exercice 7 : 1) $f(50)=20\mathrm{e}^{-0{,}03\times 50}=20\mathrm{e}^{-1{,}5}\approx 4{,}4626$. Il s'agit de l'estimation du nombre de kg de sucre consommés en moyenne par habitant de la France et par an en $1970+50=2020$.

2) a) $f(x)\leqslant 5 \Leftrightarrow 20\mathrm{e}^{-0{,}03x}\leqslant 5 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}03x}\leqslant\dfrac{1}{4}$ car $\dfrac{5}{20}=\dfrac{1}{4}$.

$f(x)\leqslant 5 \Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}^{-0{,}03x})\leqslant\ln\left(\dfrac{1}{4}\right) \Leftrightarrow -0{,}03x\leqslant-\ln 4 \Leftrightarrow x\geqslant\dfrac{\ln 4}{0{,}03} \Leftrightarrow x\geqslant\dfrac{100\ln 4}{3}$ avec $\dfrac{100\ln 4}{3}\approx 46{,}21$.

$\boxed{\mathrm{S}=\left[\dfrac{100\ln 4}{3};+\infty\right[}$.

b) $1970+47=2017$. À partir de 2017, la consommation de sucre sera inférieure à 5 kg par personne et par an.