Terminale ES – Exercice du bac Pondichéry du 8 juin 2012 : étude de fonction avec exponentielle.

Note : Présence d'un calcul d'intégrale et de moyenne à calculer à l'aide de l'intégrale.

Partie A :

Soit d la fonction définie sur l'intervalle [0;4] par : $d(x)=\dfrac{3x+0{,}3}{e^x}-1{,}3$.

On note d' la fonction dérivée de la fonction d sur l'intervalle $[0;4]$.

1) Démontrer que pour tout réel x variant dans l'intervalle $[0;4]$, $d'(x)=\dfrac{-3x+2{,}7}{e^x}$.

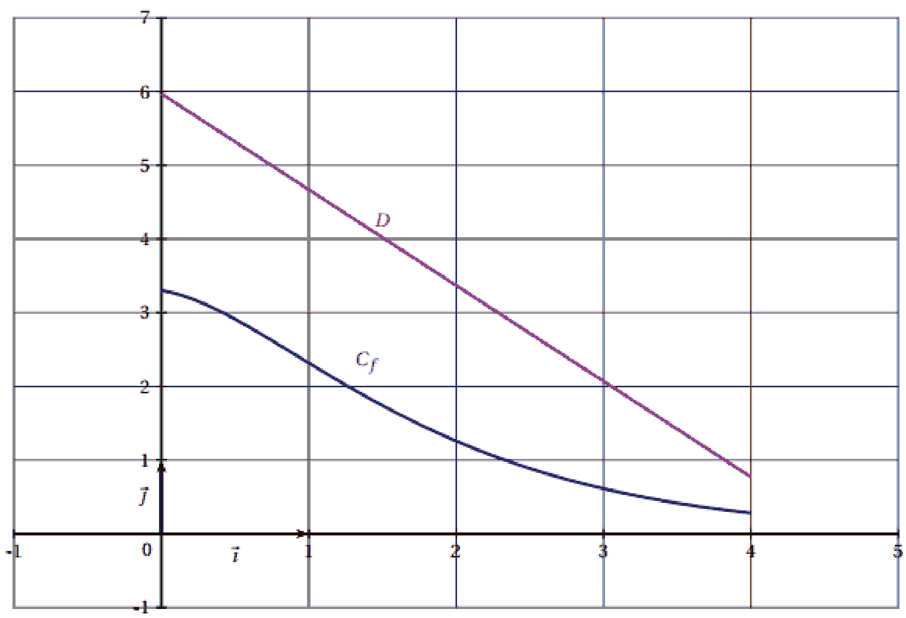
2) Étudier, pour x variant dans l'intervalle $[0;4]$, le signe de $d'(x)$, puis dresser le tableau de variations complet de la fonction d sur l'intervalle [0;4]. (On donnera dans ce tableau des valeurs arrondies à 10^{-2} près.)

3) En déduire le signe de la fonction d sur l'intervalle $[0;4]$.

Partie B :

Soient f et g les fonctions définies sur [0;4] par $f(x)=\dfrac{3x+3{,}3}{e^x}$ et $g(x)=-1{,}3x+5{,}97$.

On admet que les fonctions f et g sont décroissantes sur [0;4] ; la fonction f est représentée ci-dessous par la courbe C_f et la fonction g par la droite D.



1) Soit h la fonction définie sur $[0;4]$ par $h(x)=g(x)-f(x)$.

a) Montrer que pour tout $x \in [0;4]$ $h'(x)=d(x)$ désigne la fonction étudiée dans la partie A.

b) En déduire le tableau de variations de la fonction h sur $[0;4]$.

c) Montrer que l'équation $h(x)=1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0;4]$. En donner une valeur approchée à 10^{-1} près.

2) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^4 g(x)\,dx$.[1]

Partie C

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. Les résultats de la partie B pourront être utilisés pour répondre aux questions suivantes :

Une entreprise prévoit de fabriquer et de commercialiser mensuellement entre 1 et 4 tonnes d'un produit cosmétique (toute la production est vendue). Pour x tonnes de produit fabriquées mensuellement (avec $x \in [0;4]$), on admet que $f(x)$ désigne le coût de production par tonne (en centaines de milliers d'euros), et $g(x)$ le prix de vente par tonne (en centaines de milliers d'euros).

1 Pour cela, trouver une fonction G dont la dérivée est g, l'intégrale est égale à G(4)-G(1).

1) L'entreprise décide de produire 1 tonne par mois. Déterminer, en arrondissant à l'euro près, le coût de production par tonne produite, son prix de vente, et le bénéfice mensuel ainsi réalisé.

2) Déterminer, en euros, le prix de vente moyen par tonne pour une production comprise entre 1 et 4 tonnes.[2]

3) L'entreprise souhaite réaliser un bénéfice par tonne d'au moins 100 000 €. Quelles quantités doit-elle produire pour satisfaire cette contrainte ?

Correction

Partie A

1) d est la fonction définie sur $[0;4]$ par $\boxed{d(x)=\dfrac{3x+0,3}{e^x}-1,3}$. Calculons $d'(x)$.

$d(x)$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}-1,3$ avec $\boxed{u(x)=3x+0,3}$, $\boxed{u'(x)=3}$, et $\boxed{v(x)=v'(x)=e^x}$.

Donc pour tout x de [0;4], $d'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

$d'(x)=\dfrac{3e^x-(3x+0,3)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{(3-3x-0,3)e^x}{e^x\times e^x}$

(on a le droit de simplifier par e^x car c'est un nombre non nul puisque toujours strictement positif.)

$\boxed{d'(x)=\dfrac{-3x+2,7}{e^x}}$ C.Q.F.D.

2) Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x>0$, le signe de $d'(x)$ sera celui de son numérateur $-3x+2,7$.

$-3x+2,7>0 \Leftrightarrow -3x>-2,7 \Leftrightarrow x<0,9$.

$d(0)=\dfrac{3\times 0+0,3}{e^0}-1,3=\dfrac{0,3}{1}-1,3$ $\boxed{d(0)=-1}$.

$d(0,9)=\dfrac{3\times 0,9+0,3}{e^{0,9}}-1,3$ $\boxed{d(0,9)\approx -0,08}$ $d(4)=\dfrac{3\times 4+0,3}{e^4}-1,3$ $\boxed{d(4)\approx -1,07}$

x	0		0,9		4
$d'(x)$		+	0	−	
d	-1	↗	$-0,08$	↘	$-1,07$

3) Comme le maximum de d sur $[0;4]$ est strictement négatif, la fonction d est à valeurs strictement négatives dans [0;4], c'est-à-dire que pour tout $x \in$ [0;4], $d(x)<0$.

Partie B

f et g sont les fonctions définies sur [0;4] par $\boxed{f(x)=\dfrac{3x+3,3}{e^x}}$ et $\boxed{g(x)=-1,3x+5,97}$.

h est définie pour tout x de $[0;4]$ par $h(x)=g(x)-f(x)$.

2 Il s'agit de diviser l'intégrale de la partie B par le nombre de tonnes, soit l'étendue de l'intervalle [1;4] sur laquelle est calculée l'intégrale.

1) Pour tout x de $[0;4]$, $h(x)=-1{,}3x+5{,}97-\dfrac{3x+3{,}3}{e^x}$. Donc $h(x)$ est de la forme $-1{,}3x+5{,}97-\dfrac{u(x)}{v(x)}$

avec $\boxed{u(x)=3x+3{,}3}$, $\boxed{u'(x)=3}$ et $\boxed{v(x)=v'(x)=e^x}$.

Donc pour tout x de [0;4], $h'(x)=-1{,}3-\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$, soit $h'(x)=-1{,}3-\dfrac{3e^x-(3x+3{,}3)e^x}{(e^x)^2}$,

soit $h'(x)=-1{,}3-\dfrac{(3-3x-3{,}3)e^x}{e^x\times e^x}$, soit $h'(x)=-1{,}3-\dfrac{-3x-0{,}3}{e^x}$ (on a le droit de simplifier par e^x car il est non nul, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x>0$.)

Soit, pour tout x de $[0;4]$, $\boxed{h'(x)=-1{,}3+\dfrac{3x+0{,}3}{e^x}}$ ou encore $\boxed{h'(x)=\dfrac{3x+0{,}3}{e^x}-1{,}3}$.

(Rappel : $-\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{b}$ puisque $\dfrac{-a}{b}=-\dfrac{a}{b}$ pour tous réels a et b, b étant non nul)

On a bien, pour tout $x \in [0;4]$, $\boxed{h'(x)=d(x)}$.

2) On a vu dans la partie A que pour tout x de [0;4], $d(x)<0$. Comme pour tout x de $[0;4]$, $h'(x)=d(x)$, pour tout x de [0,4], $h'(x)<0$. Donc h est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;4]$.

$$h(0)=-1{,}3\times0+5{,}97-\frac{3\times0+3{,}3}{e^0}=5{,}97-\frac{3{,}3}{1} \qquad \boxed{h(0)=2{,}67}$$

$$h(4)=-1{,}3\times4+5{,}97-\frac{3\times4+3{,}3}{e^4}=0{,}77-\frac{15{,}3}{e^4} \qquad \boxed{h(4)\approx0{,}49}$$

x	0	4
h	2,67 ↘	$0{,}77-\dfrac{15{,}3}{e^4}$

c) On sait que h est dérivable donc <u>continue</u> sur $[0;4]$, que h est <u>strictement décroissante</u> sur [0;4], que $\boxed{h(0)=2{,}67>1}$ et que $\boxed{h(4)<1}$ puisque $h(4)<0{,}77$: en effet : $15{,}3>0$, $e^4>0$ donc $\dfrac{15{,}3}{e^4}>0$ donc $-\dfrac{15{,}3}{e^4}<0$, donc $0{,}77-\dfrac{15{,}3}{e^4}<0{,}77$. On applique le <u>théorème des valeurs intermédiaires</u> et on trouve que 1 admet un unique antécédent par h dans [0,4], c'est-à-dire qu'<u>il existe une unique solution</u> dans $[0;4]$ à l'équation $h(x)=1$. Nommons α cette solution.

Grâce à un balayage de pas 10^{-1} de l'intervalle [0;4] à l'aide de la fonction TABLE de la calculatrice, on trouve : $h(3{,}5)>1$, $h(3{,}6)<1$. On fait calculer $h(3{,}55)\approx0{,}954<1$, donc α est plus proche de $3{,}5$ que de 3,6.
Une valeur arrondie de α à 10^{-1} près est donc $\boxed{3{,}5}$.

2) Déterminons une primitive de g sur [0;4], c'est-à-dire une fonction dont la dérivée est g.
On sait que pour tout x de $[0;4]$, $g(x)=-1{,}3x+5{,}97$.

Une primitive de $x \mapsto x$ est $\dfrac{x^2}{2}$, donc une primitive de $x \mapsto -1{,}3x$ est $x \mapsto -1{,}3\times\dfrac{x^2}{2}$

soit $x \mapsto -0{,}65x^2$, et une primitive de la fonction $x \mapsto 5{,}97$ est $x \mapsto 5{,}97x$.

Donc une primitive de la fonction g sur $[0;4]$ est la fonction G définie sur $[0;4]$ par
$G(x)=-0{,}65x^2+5{,}97x$.

(Note : les primitives de g sur $[0;4]$ sont de la forme $x \mapsto -0{,}65x^2+5{,}97+k$ où k est une constante.

Dans le cas de G, on a choisi $k=0$.)

On a donc $\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x=G(4)-G(1)=(-0{,}65\times 4^2+5{,}97\times 4)-(-0{,}65\times 1^2+5{,}97\times 1)$

$\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x=-10{,}4+23{,}88+0{,}65-5{,}97$, soit $\boxed{\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x=8{,}16}$.

Partie C.

1) Pour une tonne produite par mois, le coût de production par tonne produite est, en centaines de milliers d'euros, f(1). $f(1)=\dfrac{3\times 1+3{,}3}{e^1}=\dfrac{6{,}3}{e}$ $\quad f(1)\approx 2{,}31764$. Donc le coût de production par tonne produite est d'environ **231 764 €**.

Pour une tonne produite par mois, le prix de vente par tonne est, en centaines de milliers d'euros, $g(1)$.
$g(1)=-1{,}3\times 1+5{,}97 \quad g(1)=4{,}67$. Le prix de vente par tonne est donc de **467 000 €**.

Pour une tonne produite par mois, le bénéfice est, en centaines de milliers d'euros, de $h(1)=g(1)-h(1)$.
$467\,000-231\,764=235\,236$. Le bénéfice est d'environ **235 236 €** par tonne produite.

2) Le prix de vente moyen par tonne pour une production comprise entre 1 et 4 tonnes est, en centaines de milliers d'euros : $\dfrac{\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x}{4-1}=\dfrac{\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x}{3}=\dfrac{8{,}16}{3}=2{,}72$.
Donc le prix de vente moyen par tonne pour une production comprise entre 1 et 4 tonnes est de **272 000 €**.

3) Le bénéfice sera d'au moins 100 000 € par tonne produite si et seulement si $h(x)\geqslant 1$.

x	0	$\alpha\approx 2{,}35$	4
h	2,67	1	$0{,}77-\dfrac{15{,}3}{e^4}$

D'après les résultats de la partie B, $h(x)\geqslant 1 \Leftrightarrow x\leqslant\alpha$ sur [0;4].
L'entreprise doit donc produire moins de 2,35 tonnes par mois pour que le bénéfice soit d'au moins 100 000 € par tonne produite.