Terminale ES – Exercice 2 du sujet de bac LIBAN de juin 2012

Énoncé :

Partie A :

On considère la fonction f définie sur $[0;5]$ par $f(x)=x\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x}-8$.

1) Montrer que $f'(x)=x\mathrm{e}^{x}$, où f' désigne la fonction dérivée de f sur $[0;5]$.

2) Calculer $f''(x)$ pour tout réel x de $[0;5]$. En déduire la convexité de f.

3) Dresser le tableau de variations complet de f sur $[0;5]$.

4) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet sur $[0;5]$ une unique solution α.

b) Vérifier que $2{,}040<\alpha<2{,}041$.

c) En utilisant les questions précédentes, déduire le signe de $f(x)$ en fonction des valeurs de x sur $[0;5]$

5) a) Montrer que la fonction g définie sur $[0;5]$ par $g(x)=x\mathrm{e}^{x}-2\mathrm{e}^{x}-8x$ est une primitive de f sur $[0;5]$.[1]

b) Calculer la valeur exacte de $\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.[2]

Partie B : Application à une situation économique.

Une entreprise fabrique x milliers d'objets avec x appartenant à $[0;5]$.
La fonction f de la partie A modélise les bénéfices ou les pertes de l'entreprise en centaines d'euros.
Pour une quantité x donnée, si $f(x)$ est positif, l'entreprise subit une perte.
En utilisant les résultats de la partie A, répondre aux questions suivantes en justifiant :

1) À partir de combien d'objets produits l'entreprise commence-t-elle à réaliser des bénéfices ?

2) L'entreprise pense produire régulièrement entre 3 et 5 milliers d'objets. Déterminer la valeur moyenne[3] du bénéfice sur [3;5] (on donnera le résultat arrondi à l'euro près)

---

1 Cela revient à prouver que la dérivée de g est f.
2 Cette intégrale est égale à $g(5)-g(3)$.
3 Il s'agit de l'intégrale calculée à la partie A divisée par l'étendue de l'intervalle [3;5] sur lequel elle est calculée, c'est-à-dire par $5-3$.

Corrigé

Partie A :

f est définie sur $[0;5]$ par $f(x)=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-8$.

1) f est dérivable sur [0;5] (l'énoncé semble l'admettre, mais on peut aussi dire que f l'est en tant que somme de fonctions qui sont dérivables sur ℝ, le premier terme étant un produit de deux fonctions dérivables sur ℝ)

$f(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)-\mathrm{e}^x-8$ avec $u(x)=x$, $u'(x)=1$ et $v(x)=v'(x)=\mathrm{e}^x$
Donc pour tout x de [0;5], $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)-\mathrm{e}^x$,
Soit $f'(x)=1\times\mathrm{e}^x+x\times\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x$, soit $\boxed{f'(x)=x\mathrm{e}^x}$.

2) $f'(x)$ est le produit de deux fonctions dérivables sur [0;5], donc elle est dérivable sur [0;5].
$f'(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=x$, $u'(x)=1$ et $v(x)=v'(x)=\mathrm{e}^x$.
Donc pour tout x de [0;5], $f''(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$, soit $f''(x)=1\times\mathrm{e}^x+x\times\mathrm{e}^x$,
soit $\boxed{f''(x)=(1+x)\mathrm{e}^x}$.

Comme $x\in$ [0;6], $1+x\in$ [1;7], donc $1+x>0$.
De plus, pour tout x de ℝ, donc de [0;6], $\mathrm{e}^x>0$.
Donc, d'après la règle des signes, pour tout *x* de [0;6], $\boxed{f''(x)>0}$.
f est donc <u>convexe</u> sur [0;5].

3) $f(0)=0\times\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^0-8=0-1-8=-9$ $\qquad$ $f(5)=5\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^5-8=4\mathrm{e}^5-8$.

x	0		α		5
x	0			$+$	
e^x				$+$	
$f'(x)$	0			$+$	
f	-9	↗	0	↗	$4\mathrm{e}^5-8$

4) a) $f(0)=-9$ donc $f(0)<0$. La calculatrice donne : $4\mathrm{e}^5-8\approx 586$, donc $f(5)>0$.
La fonction *f* est continue car dérivable et strictement croissante sur $[0;5]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α dans [0;5] tel que $f(\alpha)=0$.

b) D'après la calculatrice, $f(2{,}040)<0$ et $f(2{,}041)>0$, donc $2{,}040<\alpha<2{,}041$.

c) Comme f est strictement croissante sur $[0;5]$ et comme l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution, α, sur cet intervalle, $f(x)$ sera négatif pour $x\in[0;\alpha[$, $f(x)$ est nul pour $x=\alpha$, et $f(x)$ sera positif pour $x\in]\alpha;5]$.

5) a) g définie sur $[0;5]$ par $g(x)=x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x-8x$. $g(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)-2\mathrm{e}^x-8x$.
Avec $u(x)=x$, $u'(x)=1$ et $v(x)=v'(x)=\mathrm{e}^x$. Donc *g* est dérivable sur $[0;5]$ et, pour tout x de $[0;5]$,
$g'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)-2\mathrm{e}^x-8=1\times\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x-8$, soit $\boxed{g'(x)=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-8=f(x)}$.

g est dont bien une primitive de f sur $[0;5]$.

b) $\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = g(5) - g(3) = (5\mathrm{e}^5 - 2\mathrm{e}^5 - 8\times 5) - (3\mathrm{e}^3 - 2\mathrm{e}^3 - 8\times 3) = 3\mathrm{e}^5 - 40 - (\mathrm{e}^3 - 24) = 3\mathrm{e}^5 - 40 - \mathrm{e}^3 + 24$

$$\boxed{\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^3 - 16}$$

Partie B : Application à une situation économique.

1) On a vu dans la partie A que $f(x) < 0$ pour x ∈ [0;α[, que $f(x) = 0$ pour $x = \alpha$, et que $f(x) > 0$ pour x ∈ x ∈ $]\alpha;5]$, avec $2{,}040 < \alpha < 2{,}041$. Comme x est un nombre de milliers d'objets, c'est à partir de la production de 2 041 objets que l'entreprise commence à réaliser des bénéfices.

2) La valeur moyenne de f sur [3;5] est : $\dfrac{\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x}{5-3} = \dfrac{\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x}{2} = \dfrac{3e^5 - e^3 - 16}{2} \approx 204{,}58$.

La valeur moyenne du bénéfice pour une production de 3000 à 5000 objets est de **20 458 €**.