Terminale ES – Exercice 1 du Bas ES Polynésie de septembre 2011

## Énoncé :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.
On s'intéresse dans cet exercice à la fonction $f$ définie sur ℝ par $f(x)=-1+x\mathrm{e}^x$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) On admet que la fonction $f$ est dérivable sur ℝ et on note $f'$ sa fonction dérivée.

a) Montrer que, pour tout nombre réel $x$, on a $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ (la valeur de l'extremum sera arrondie à $10^{-2}$)

2) Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $[0;1]$ une unique solution α. Donner un encadrement de α d'amplitude $10^{-2}$.

3) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y=x-1$.

4) Dans le repère $(0;\vec{i},\vec{j})$, tracer la droite (T) et la courbe $\mathscr{C}$. Quelle conjecture peut-on faire sur la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (T) ?

5) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.* Justifier la conjecture émise à la question 4.

## Corrigé :

1) a) $f$ est définie sur ℝ par $\boxed{f(x)=-1+x\mathrm{e}^x}$.
$f(x)$ est de la forme $-1+u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=x$, $u'(x)=1$, et $v(x)=v'(x)=\mathrm{e}^x$.
Donc $f'(x)=0+u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$, $f'(x)=1\times\mathrm{e}^x+x\times\mathrm{e}^x$ donc $\boxed{f'(x)=(1+x)\mathrm{e}^x}$.

b) $1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$. $f(-1)=-1+(-1)\mathrm{e}^{-1}=-1-\mathrm{e}^{-1} \approx -1{,}37$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1+x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\mathrm{e}^x$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| variations de $f$ | | $\searrow$ | $-1{,}37$ | $\nearrow$ | |

2) $f(0)=-1+0\times\mathrm{e}^0$, $f(0)=-1$. Donc $f(0)<0$
$f(1)=-1+1\times\mathrm{e}^1$ $f(1)=-1+\mathrm{e}$. Comme $\mathrm{e}>2$, $f(1)>0$.
La fonction $f$ est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$ donc en particulier sur [0;1].
La fonction $f$ est dérivable donc continue sur ℝ, donc en particulier sur [0;1].
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans [0;1].

3) Pour les deux méthodes proposées, on a besoin des valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
On a vu que $\boxed{f(0)=-1}$. $f'(0)=(0+1)\mathrm{e}^0$, $\boxed{f'(0)=1}$.

Méthode 1 : on sait que si une fonction $f$ est dérivable en $a$, une équation de la tangente à sa courbe représentative en son point d'abscisse $a$ est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

On applique cette formule à notre fonction $f$ et à la valeur $a=0$ : une équation de la tangente (T) est :
$y=f'(0)(x-0)+f(0) \Leftrightarrow y=1\times x+(-1) \Leftrightarrow \boxed{y=x-1}$.

Méthode 2 : on ne sait pas par cœur la formule de la tangente, mais on se doit de savoir que le nombre dérivé de la fonction en une valeur $a$ où elle est dérivable est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction en son point d'abscisse $a$.

On sait donc que le coefficient directeur de (T) est $f'(0)=1$.
Donc l'équation réduite de $(\text{T})$ est de la forme $y=1x+p$ ou encore $y=x+p$.

Pour trouver le coefficient $p$, on se sert des coordonnées d'un point dont on sait qu'il est sur (T), le point A de coordonnées $(0;f(0))$ ou encore $(0;-1)$.
Les coordonnées de A vérifient donc l'équation réduite de (T) et on a $y_A=x_A+p$ soit $-1=0+p$ soit $-1=p$.
L'équation réduite de (T) est donc $\boxed{y=x-1}$.

4) Pour le tracé de (T), il suffit d'en connaître deux points. Pour plus de précision dans le tracé, choisissons deux points éloignés l'un de l'autre :

Le point de (T) d'abscisse $-2$ a pour ordonnée $-2-1=-3$. Point de coordonnées $(-2;-3)$.
Le point de (T) d'abscisse 5 a pour ordonnée $5-1=4$. Point de coordonnées $(5;4)$.

On a vu aussi que $\text{A}(0;-1) \in$ (T)

Pour tracer la courbe $\mathscr{C}$, après un aperçu à la calculatrice, on choisit judicieusement une série d'abscisses pour établir un tableau de valeurs (arrondies à $10^{-2}$ près) :

| $x$ | $-7$ | $-4$ | $-2$ | $-1$ | $-0,5$ | $0$ | $0,5$ | $1$ | $1,1$ | $1,2$ | $1,3$ | $1,4$ | $1,5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -1,01 | -1,07 | -1,27 | -1,37 | -1,3 | $-1$ | -0,17 | 1,72 | 2,31 | 3 | 3,77 | 4,68 | 5,72 |

Comme $f'$ s'annule en $-1$, on n'oubliera pas que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale en son point d'abscisse $-1$.

Voir la courbe en annexe (Attention à cette échelle de 2 cm par unité, ou 0,1 est représenté par 2 mm).

On conjecture d'après le graphique que la courbe $\mathscr{C}$ se trouve toujours au-dessus de la droite (T), sauf en $x=0$ où elles ont en commun le point d'abscisse $(0;-1)$.

5) On note $g$ la fonction affine dont (T) est la courbe représentative. Pour tout réel $x$, on a donc $g(x)=x-1$.
C'est le signe de $h(x)=f(x)-g(x)$ qui va nous donner la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à (T).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x)=-1+x\mathrm{e}^x-(x-1)=-1+x\mathrm{e}^x-x+1=x\mathrm{e}^x-x=x(e^x-1)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\mathrm{e}^x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| h(x) | | $+$ | $0$ | $+$ | |

Car on sait que la fonction exponentielle est strictement croissante, inférieure à 1 sur $]-\infty;0[$, égale à 1 pour $x=0$ et supérieure à 1 sur $]0;+\infty[$.

La courbe $\mathscr{C}$ se situe bien au-dessus de la droite (T), la rencontrant uniquement en leur point commun A d'abscisse 0.