Terminale ES – Problème sur les fonctions (Extrait du bac blanc de janvier 2013, lycée Pierre Bourdan à Guéret)

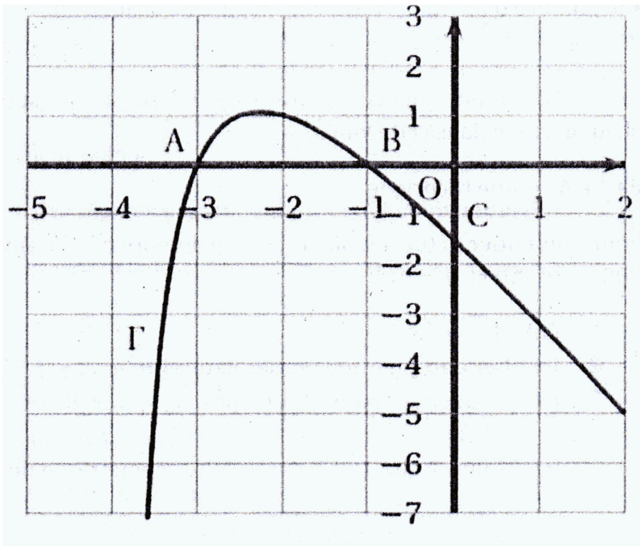
Partie A.

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]-4;+\infty[$.

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]-4;+\infty[$.

La courbe Γ ci-contre est la représentation graphique dans un repère orthogonal de f', la fonction dérivée de f sur $]-4;+\infty[$.

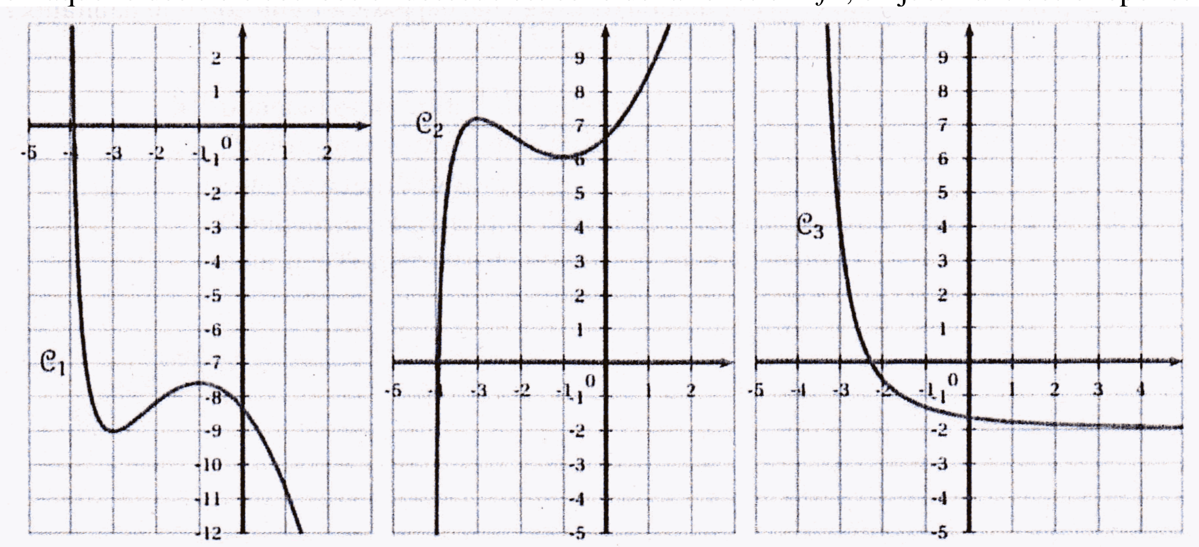
Cette courbe Γ passe par les points $A(-3;0)$, $B(-1;0)$ et $C(0;-1{,}5)$.



1) À l'aide de la représentation graphique de la fonction f', déterminer $f'(0)$ et $f'(-3)$.

2) En étudiant les variations de f', déterminer la convexité de *f*.

3) Trois courbes sont présentées ci-dessous. Une seule de ces trois courbes représente la fonction f. Déterminer laquelle des trois courbes ci-dessous est celle de la fonction f, en justifiant votre réponse :



Partie B

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0{,}5;25]$. On note f' sa fonction dérivée.

Nous savons que $f'(x)=\dfrac{-2x^2+16x+18}{x}$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0{,}5;25]$.

1) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0{,}5;25]$. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}5;25]$.

2) Calculer $f''(x)$ pour tout réel x de $[0{,}5;25]$ et étudier son signe. Conclure.

Corrigé commenté.

Partie A

1) Comme $C(0;-1{,}5) \in \Gamma$, courbe représentative de la fonction f', $\boxed{f'(0)=-1{,}5}$.
Comme $A(-3;0) \in \Gamma$, $\boxed{f'(-3)=0}$.

2) D'après le graphique, il semble exister une valeur α proche de $-2{,}3$ telle que f' soit strictement croissante sur l'intervalle $]-4;\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.

Attention : l'affirmation qui précède n'est pas à prendre comme une vérité mais comme un conjecture, d'autant plus que la courbe Γ n'apparaît pas en entier sur le graphique. Mais même dans sa partie apparente, les apparences pourraient être trompeuses.

f sera donc convexe sur $\boxed{]-4;\alpha]}$ et concave sur $\boxed{[\alpha;+\infty[}$, et sa courbe devrait présenter un point d'inflexion d'abscisse $\boxed{\alpha\approx-2{,}3}$.

Si, sans donner un nom à la valeur, vous avez rédigé avec –2,3 ou –2,25 par exemple à la place de α, le correcteur ne devrait pas vous en tenir rigueur. Ici, de toute façon, on ne travaille pas dans la rigueur mais dans le flou d'une lecture graphique.

3) La courbe C_3 est à exclure car elle représente une fonction convexe sur $]-4;5[$.
La courbe C_2 représente une fonction concave sur $]-4;\beta]$ puis convexe sur $[\beta;1{,}5]$ avec $\beta\approx\alpha$, sauf que la convexité ne coïncide pas avec notre résultat de la question 2. C_2 est dont à exclure aussi.

Par élimination, c'est donc la courbe $\boxed{C_1}$ qui doit correspondre. Vérifions que ses caractéristiques coïncident bien avec les déductions que nous avons faites par lecture de la courbe Γ : Il semble bien qu'il existe une valeur α proche de $-2{,}3$ telle que la fonction représentée par C_1 soit convexe sur]-4;α] puis concave sur $[\alpha;1{,}5[$ donc il se pourrait que la fonction représentée soit concave sur [α;+∞[. La courbe présente bien, apparemment, un point d'inflexion d'une abscisse proche de $-2{,}3$.
Donc C_1 doit être la courbe représentative de f.

Partie B

f est définie et dérivable sur $[0{,}5;25]$ et on a $\boxed{f'(x)=\dfrac{-2x^2+16x+18}{x}}$.

1) Pour étudier le signe de $f'(x)$, on étudie préalablement celui de son numérateur $-2x^2+16x+18$.
$\Delta=16^2-4\times(-2)\times18=256+144=400=20^2$ (On a $\sqrt{\Delta}=20$)
$\Delta>0$, donc le trinôme admet deux racines : $x_1=\dfrac{-16-20}{2\times(-2)}=9$ et $x_2=\dfrac{-16+20}{2\times(-2)}=-1$.

Rappel de cours (1ère) : lorsque $\Delta=b^2-4ac>0$, le trinôme ax^2+bx+c admet deux racines distinctes : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Son signe est celui de a « en-dehors des racines » et celui opposé à a « entre les racines ».

Le tableau de signes de $-2x^2+16x+18$ sur $]-\infty;+\infty[$ est :

x	$-\infty$		-1		9		$+\infty$
$-2x^2+16x+18$		–	0	+	0	–	

Celui de x est (trivialement) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		–	0	+	

Remarque : vous pouviez très bien vous passer des deux tableaux précédents dans la rédaction de votre copie !

On restreint ces données à l'intervalle $[0{,}5;25]$ pour établir le tableau de signes de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $[0{,}5;25]$:

x	$0{,}5$		9		25
$-2x^2+16x+18$		$+$	0	$-$	
x		$+$		$+$	
$f'(x)$ (signe)		$+$	0	$-$	
f (variations)	$f(0{,}5)$	$\nearrow$	$f(9)$	$\searrow$	$f(25)$

Remarque : on ne peut pas calculer les valeurs de $f(0{,}5)$, $f(9)$ et $f(25)$ puisqu'on ne connaît pas la formule de calcul de f !

2) L'énoncé sous-entend que f' est dérivable sur l'intervalle $[0{,}5;25]$.

Pour tout x de $[0{,}5;25]$, $\boxed{f'(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}}$ avec $\boxed{u(x)=-2x^2+16x+18}$ et $\boxed{v(x)=x}$.

u et v sont dérivables sur $[0{,}5;25]$, v ne s'annule pas sur $[0{,}5;25]$ (v s'annulerait en $x=0$) et pour tout x de $[0{,}5;25]$, on a : $\boxed{u'(x)=-4x+16}$ et $\boxed{v'(x)=1}$.

Car $u'(x)=-2\times2x+16\times1+0$.

On rappelle que si $\boxed{f=\dfrac{u}{v}}$, que si u et v sont dérivables, v ne s'annulant pas, on a $\boxed{f'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}}$.

On a donc, pour tout $x\in[0{,}5;25]$, $\boxed{f''(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2}}$

$$f''(x)=\frac{(-4x+16)\times x-1\times(-2x^2+16x+18)}{x^2}=\frac{-4x^2+16x+2x^2-16x-18}{x^2}=\frac{-2x^2-18}{x^2}.$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{-2(x^2+9)}{x^2}}.$$

Pour tout x de l'intervalle $[0{,}5;25]$, $x>0$ donc $x^2>0$ et a fortiori $x^2+9>0$. D'où le tableau :

x	$0{,}5$		25
-2		$-$	
x^2+9		$+$	
x^2		$+$	
$f''(x)$ (signe)		$-$	
f' (variations)		$\searrow$	
f (convexité)		concave	

D'après le tableau de variations de f et l'étude sa convexité, f sera concave sur $[0{,}5;25]$, présentant un maximum local (et donc une tangente horizontale) en son point d'abscisse 9. (Sa courbe aurait donc l'allure d'une

« bosse » dont le point d'ordonnée maximale aurait pour abscisse 9).

Grâce au logiciel Geogebra qui sait calculer des primitives, j'ai pu faire tracer à l'ordinateur la courbe représentative de f' et celle de l'une de ses primitives, qui serait la fonction définie par $f(x)=18\ln(x)-x^2+16x$ (Vous verrez bientôt la fonction logarithme népérien, notée ln).

<u>Note</u> : dire qu'une fonction F est <u>une</u> primitive de *f* signifie que *f* est <u>la</u> dérivée de F. (Car plusieurs fonctions peuvent avoir la même dérivée, par exemple $x \mapsto 2x+3$ et $x \mapsto 2x-1$).