Terminale ES – Exercices sur les suites arithmético-géométriques

Exercice 1 : (u_n) est la suite définie sur ℕ par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=2u_n-3$.
1) Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
2) On pose pour tout n ∈ ℕ, $v_n=u_n-3$.
a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 2.
b) Exprimer v_n en fonction de n.
3) Exprimer u_n en fonction de n.
4) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2 : On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur ℕ. Dans chaque cas, montrer que la suite (v_n) est géométrique en obtenant une relation de la forme : $v_{n+1}=q\times v_n$.

a) $u_0=10$ et, pour tout entier n, $u_{n+1}=2u_n-1$ et $v_n=u_n-1$.
b) $u_0=500$ et, pour tout entier n, $u_{n+1}=0{,}95u_n+100$ et $v_n=u_n-2000$

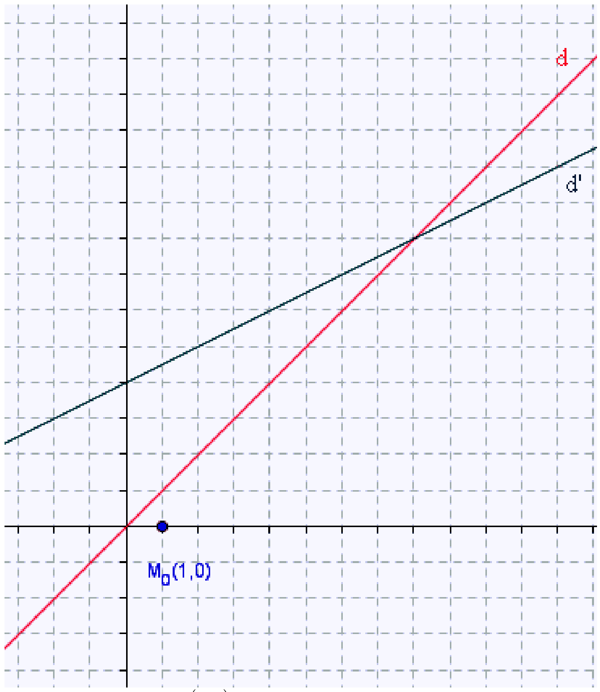
Exercice 3 : (u_n) est la suite définie sur ℕ par $u_0=5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+4$.
1) Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
2) On pose, pour tout n ∈ ℕ, $v_n=u_n-8$.
a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
b) Exprimer v_n en fonction de n.
3) a) Exprimer u_n en fonction de n.
b) Calculer u_{10}
4) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 4 : (u_n) est la suite définie sur ℕ par $u_0=-2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=3u_n+5$.
1) Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
2) On pose, pour tout n ∈ ℕ, $v_n=u_n+a$, où a est un réel constant.
a) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=3u_n+5+a$
b) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=3v_n+5-2a$
c) Pour quelle valeur de a la suite (v_n) est-elle géométrique ?
3) On pose $a=\frac{5}{2}$.
a) Exprimer v_n en fonction de n.
b) Exprimer u_n en fonction de n.
c) Calculer u_{10} .

Exercice 5 : (u_n) est la suite définie sur ℕ par $u_0=3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=-2u_n+6$.
1) Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
2) On pose, pour tout n ∈ ℕ, $v_n=u_n+a$, où a est un réel constant.
a) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=-2u_n+6+a$
b) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=-2v_n+6+3a$
c) Pour quelle valeur de a la suite (v_n) est-elle géométrique ?
3) On pose $a=-2$.
a) Exprimer v_n en fonction de n.
b) Exprimer u_n en fonction de n. c) Calculer u_{15} .

Exercice 6 : (u_n) est la suite définie sur ℕ par $u_0=-2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+15$.
1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2) On pose, pour tout n ∈ ℕ, $v_n=u_n-10$.
a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. b) Exprimer v_n en fonction de n.
c) Calculer $S'_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$ en fonction de n.
3) a) Exprimer u_n en fonction de n.
b) Calculer $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$ en fonction de n.
c) Calculer S_3 par l'addition des 4 premiers termes et à l'aide de la formule trouvée au 3) b). Comparer les deux résultats.

Exercice 7 : Sur le graphique ci-dessous, on a construit les droites d et d' d'équations respectives $y=x$ et $y=\frac{1}{2}x+4$.



On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+4$. Utiliser le graphique pour construire, sans calcul, les points M_1 , M_2 , M_3 de l'axe des abscisses, d'abscisses respectives u_1 , u_2 et u_3 .

Exercice 8 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1}=\frac{2u_n+4}{3}$.
1) Calculer u_1 , u_2 , u_3 .
2) Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (Unité graphique 2 cm). Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{2x+4}{3}$. a) Tracer la représentation graphique d de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y=x$.
b) En utilisant d et Δ, construisez u_1 , u_2 , u_3 .
c) Conjecturer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ à l'aide de la construction, que l'on peut imaginer, d'un grand nombre de termes de la suite (u_n) .
3) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-4$. a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme. b) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que pour tout n, $u_n=4-3\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .