Terminale ES – Problème sur les suites du sujet Antilles-Guyane de septembre 2011.

Un centre aéré, ouvert tous les mercredis après-midis à partir du 1er septembre, propose aux enfants de s'inscrire chaque semaine à une activité. L'une de ces activités est la natation.
Une étude effectuée sur l'année scolaire 2009/2010 montre que, d'une semaine sur l'autre, 5% des enfants ne se réinscrivent pas à la natation, alors que dans le même temps, 10 nouveaux enfant s'y inscrivent.
Le directeur se base sur les résultats de l'année scolaire 2009/2010 pour prévoir l'évolution des inscriptions pour l'année 2010/2011.

La première semaine de l'année scolaire 2010/2011, 80 enfants se sont inscrits à la natation, 80 enfants se sont inscrits à la natation. On note u_0 le nombre initial d'enfants inscrits à la natation, ainsi, $u_0=80$.
Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'enfants inscrits à la natation au bout de n semaines.

1) Montrer que $u_1=86$.

2) Pour tout entier naturel n , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

3) a) Pour tout entier naturel n , on pose $a_n=u_n-200$. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Pour tout entier naturel n , exprimer a_n en fonction de n . En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $u_n=200-120\times0{,}95^n$.

Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

4) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1}-u_n=6\times0{,}95^n$. En déduire que le nombre d'inscriptions à la natation augmente toutes les semaines.

5) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Après combien de semaines, le contexte restant le même, le nombre d'enfants inscrits à la piscine dépassera-t-il 150 ?

Corrigé

1) Comme 5% des enfants ne se réinscrivent pas, 95% se réinscrivent. Le nombre de réinscrits pour la deuxième semaine de l'année scolaire est donc de $0{,}95\times80=76$. À ceux-ci s'ajoutent 10 nouveaux inscrits. On a donc $u_1=76+10=86$.

2) Chaque semaine, 95% des inscrits se réinscrivent et on ajoute 10 nouveaux inscrits. C'est pourquoi, pour tout n , $\boxed{u_{n+1}=0{,}95u_n+10}$.

3) a) Pour tout entier n , $\boxed{a_n=u_n-200}$.

- On exprime a_{n+1} en fonction de u_{n+1} : $\forall$ n, $a_{n+1}=u_{n+1}-200$.
- On remplace u_{n+1} par sa valeur en fonction de u_n : $\forall\, n$, $a_{n+1}=(0{,}95u_n+10)-200$
  $a_{n+1}=0{,}95u_n-190$.
- On factorise par le coefficient de u_n : $a_{n+1}=0{,}95u_n-0{,}95\times200=0{,}95(u_n-200)$ (car $\dfrac{190}{0{,}95}=200$)

- On remplace $u_n - 200$ par v_n : Pour tout entier n, $\boxed{a_{n+1} = 0{,}95\, a_n}$.

La suite $\boxed{(a_n)}$ est donc géométrique de raison 0,95.

Son terme initial est : $a_0 = u_0 - 200 = 80 - 200 = -120$. $\boxed{a_0 = -120}$.

b) On a donc, pour tout n, $a_n = a_0 \times 0{,}95^n$, soit $\boxed{a_n = -120 \times 0{,}95^n}$.
Pour tout n, on a aussi : $a_n = u_n - 200$, donc $u_n = a_n + 200$, et par conséquent : $u_n = -120 \times 0{,}95^n + 200$ ou encore $\boxed{u_n = 200 - 120 \times 0{,}95^n}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = (200 - 120 \times 0{,}95^{n+1}) - (200 - 120 \times 0{,}95^n)$$
$$u_{n+1} - u_n = 200 - 120 \times 0{,}95^{n+1} - 200 + 120 \times 0{,}95^n$$
$$u_{n+1} - u_n = 120 \times 0{,}95^n - 120 \times 0{,}95^{n+1}$$
$$u_{n+1} - u_n = 120 \times 0{,}95^n \times 1 - 120 \times 0{,}95^n \times 0{,}95 \text{ car } 0{,}95^{n+1} = 0{,}95^n \times 0{,}95^1$$
$$u_{n+1} - u_n = 120 \times 0{,}95^n \times (1 - 0{,}95)$$
$$u_{n+1} - u_n = 120 \times 0{,}95^n \times 0{,}05$$
$$u_{n+1} - u_n = 6 \times 0{,}95^n \text{ car } 120 \times 0{,}05 = 6$$

La différence $u_{n+1} - u_n$, pour tout n, est un nombre positif, puisque, d'après la règle des signes, comme $6 > 0$ et $0{,}95 > 0$, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$, soit $u_{n+1} > u_n$. Chaque semaine, le nombre d'adhérents est donc plus grand que la semaine précédente, ce nombre augmente bien chaque semaine.

5) On veut savoir à partir de quelle valeur de n on a $u_n > 150$.
Comme, pour tout n, $u_n = 200 - 120 \times 0{,}95^n$, on résout l'inéquation (I) $200 - 120 \times 0{,}95^n > 150$

(I) $\Leftrightarrow$ $50 > 120 \times 0{,}95^n$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{50}{120} > 0{,}95^n$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{5}{12} > 0{,}95^n$.

- Si on connaît les logarithmes : (I) $\Leftrightarrow$ $\ln\left(\dfrac{5}{12}\right) > \ln(0{,}95^n)$ (On peut composer par la fonction logarithme népérien car celle-ci est strictement croissante donc conserve l'ordre sur $]0;+\infty[$ et car $\dfrac{1}{6}$ et $0{,}95^n$ sont deux nombres strictement positifs). (I) $\Leftrightarrow$ $\ln 5 - \ln 12 > n \ln 0{,}95$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\ln 5 - \ln 12}{\ln 0{,}95} < n$.

  <u>Remarque à ne pas zapper</u> : On change le sens du signe > quand on divise les deux membres de l'équation par $\ln 0{,}95$ car $\ln 0{,}95$ est un nombre strictement négatif, puisque $0{,}95 < 1$.

La calculatrice nous donne une valeur approchée de $\dfrac{\ln 5 - \ln 12}{\ln 0{,}95} \approx 17{,}06$.
Le nombre d'inscrits sera donc supérieur à 150 après 18 semaines.

- Si on ne connaît pas les logarithmes :

On utilise le fait que la suite de terme général $0{,}95^n$ est strictement décroissante car $0 < 0{,}95 < 1$.
On demande à la calculatrice une valeur approchée de $\dfrac{5}{12} \approx 0{,}417$.
On demande à la calculatrice un tableau de valeurs de $0{,}95^X$ de pas 1.
On obtient : $0{,}95^{17} \approx 0{,}4181$ et $0{,}95^{18} \approx 0{,}3972$. C'est donc à partir du rang $n = 18$ que $0{,}95^n < \dfrac{5}{12}$.
C'est donc après 18 semaines que le nombre d'inscrits dépassera 150.