Exercice 1 : Extrait de l'exercice 4 du bac ES Asie, 20 juin 2012.

Partie A. 1) Graphiquement, on lit $\mathrm{C_m}(4)=2$.

2) $\mathrm{B_m}(4)=7-\mathrm{C_m}(4)=7-2=5$. Cela signifie que l'entreprise gagnera 5 milliers d'euros en produisant une tonne de détergent supplémentaire si elle en produit déjà 4.

3) Il y a deux quantités, en tonnes, pour lesquels le bénéfice marginal est nul, puisque la courbe Γ_m et la droite D se coupent en deux points. Appelons q_1 et q_2 les abscisses de ces deux points. On lit $q_1\approx 0{,}95$ et $q_2\approx 15{,}4$. Comme les valeurs doivent être données à la demi-tonne près, on dira que le bénéfice marginal est nul pour $\boxed{q_1\approx 1}$ tonne et $\boxed{q_2\approx 15{,}5}$ tonnes.

4) Sur le graphique, on lit que la courbe Γ_m est au-dessus de la droite pour q ∈ $[0;q_1[\cup]q_2;20]$ et que Γ_m est en-dessous de la droite pour q ∈ $]q_1;q_2[$. Le bénéfice marginal sera donc positif pour q ∈ $]q_1;q_2[$, ou encore pour $\boxed{q_1<q<q_2}$ (puisque l'énoncé demande un encadrement).

Partie B. 1) Pour tout q ∈ [0;20], $\mathrm{C_m}(q)=0{,}5q+(4-q)\mathrm{e}^{(1-0{,}25q)}$. On admet que $\mathrm{C_m}$ est dérivable sur [1;20]. Cela implique que $\mathrm{C_m}$ est aussi <u>continue</u> sur [0;20]. Cette donnée va nous permettre d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

a) L'énoncé nous demande d'admettre que a se situe entre 5 et 6. 10 se situe donc dans l'intervalle [a;20]. On peut en déduire, d'après le tableau de variations, que $\mathrm{C_m}$ est <u>continue</u> et <u>strictement croissante</u> sur [10;20]. Calculons $C_m(10)$ et $C_m(20)$ pour savoir si 7 se situe bien dans l'intervalle $[C_m(10);C_m(20)]$:

$\mathrm{C_m}(10)=0{,}5\times 10+(4-10)\mathrm{e}^{(1-0{,}25\times 10)}=5-6\mathrm{e}^{-1{,}5}$. On sait que $\mathrm{C_m}(10)<5$ car une exponentielle est toujours strictement positive.
Mais si vous ne le savez pas encore, demandez une valeur approchée à la calculatrice :
$\boxed{\mathrm{C_m}(10)\approx 3{,}66}$.

$\mathrm{C_m}(20)=0{,}5\times 20+(4-20)\mathrm{e}^{(1-0{,}25\times 20)}=10-16\mathrm{e}^{-6}$. La calculatrice donne $\boxed{\mathrm{C_m}(20)\approx 9{,}96}$.

On sait donc que <u>7 ∈</u> $\boxed{]\mathrm{C_m}(10);\mathrm{C_m}(20)[}$.

Les trois hypothèses soulignées en rose nous permettent d'appliquer le <u>théorème des valeurs intermédiaires dans le cas des fonctions strictement monotones</u>.

On en conclut qu'<u>il existe un unique</u> $\boxed{q_0}$ <u>dans l'intervalle</u> $\boxed{]10;20[}$ tel que $q_0=7$.
(Remarque : ce q_0 est la valeur que j'avais nommée q_2 dans la partie A)

b) On fait faire un tableau de valeurs à la calculatrice pour obtenir un encadrement de q_0 au dixième. (*En choisissant Start:15, End:16 et pitch:0,1, puisque q_0 est supposé se situer entre 15 et 16 d'après le graphique*).

Extrait de ce tableau de valeurs (arrondies au millième) :

q	15,2	15,3	15,4	15,5
$\mathrm{C_m}(q)$	6,919	6,980	7,041	7,101

On trouve que $15{,}3<q_0<15{,}4$.
Mais lequel de $\mathrm{C_m}(15{,}3)$ et $\mathrm{C_m}(15{,}4)$ est le plus proche de 7 ? Visiblement 15,3.
Pour en avoir le cœur net, demandons à la calculatrice une valeur approchée de $\mathrm{C_m}(15{,}35)$.

$C_n(15{,}35) \approx 7{,}010 > 7$. $C_m(15{,}3)$ est donc bien plus proche de 7 que $C_m(15{,}4)$.
On a donc $\boxed{q_0 \approx 15{,}3}$, ce qui est à peu près cohérent avec notre lecture graphique de la partie 1.

c) q_0 est tel que $C_m(q_0)=7$. Donc $B_m(q_0)=7-C_m(q_0)$ soit $\boxed{B_m(q_0)=0}$. En effet : q_0 est la seconde des deux valeurs qui annule le bénéfice marginal, d'après la question 1.

2) *J'ai changé l'énoncé de cette question, qui demandait en fait de prouver que C était une primitive de C_m sur [0;20]. Vous n'avez pas encore vu la notion de primitive, mais cela revient à prouver que C_m est la dérivée de C. Si vous n'êtes pas encore à l'aise avec les exponentielles, il se peut que votre professeur vous demande simplement d'admettre le résultat de cette question.*

Pour tout q ∈ [0;20], on a : $C(q)=10+0{,}25q^2+4q\times e^{[1-0{,}25q]}$.

C est dérivable sur [0;20] (en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la dernière étant un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) et on a : (En ES, vous pouvez zapper cette justification)

$C(q)=10+0{,}25q^2+u(q)\times v(q)$ avec $\boxed{u(q)=4q}$ donc $\boxed{u'(q)=4}$ et $\boxed{v(q)=e^{\left[1-\frac{1}{4}q\right]}}$. (car $0{,}25=\frac{1}{4}$)

$\boxed{v(q)=e^{U(q)}}$ avec $\boxed{U(q)=1-\frac{1}{4}q}$, donc $\boxed{U'(q)=-\frac{1}{4}}$.
On a donc $\boxed{v'(q)=U'(q)\times e^{U(q)}}$, soit $\boxed{v'(q)=-\frac{1}{4}e^{[1-0{,}25q]}}$.

D'après les formules de la dérivée d'une somme et de celle d'un produit, on obtient, pour tout q ∈ [0;20] :
$C'(q)=0+2\times 0{,}25q+u'(q)\times v(q)+v'(q)\times u(q)$,
soit : $C'(q)=0{,}5q+4\times e^{[1-0{,}25q]}-\frac{1}{4}\times e^{[1-0{,}25q]}\times 4q$,
soit : $C'(q)=0{,}5q+4\times e^{[1-0{,}25q]}-q\times e^{[1-0{,}25q]}$
soit $\boxed{C'(q)=0{,}5q+(4-q)e^{[1-0{,}25q]}}$. On a bien, pour tout $q \in [0;20]$, $C'(q)=C_m(q)$.

La fonction C_m est bien la dérivée de la fonction C sur $[0;20]$.

3) Le bénéfice total, en milliers d'euros, pour q tonnes de détergent produites, est de :
$B(q)=7q-C(q)$. (Puisque les q tonnes rapportent 7q milliers d'euros à la vente et coûtent C(q) milliers d'euros à produire.)

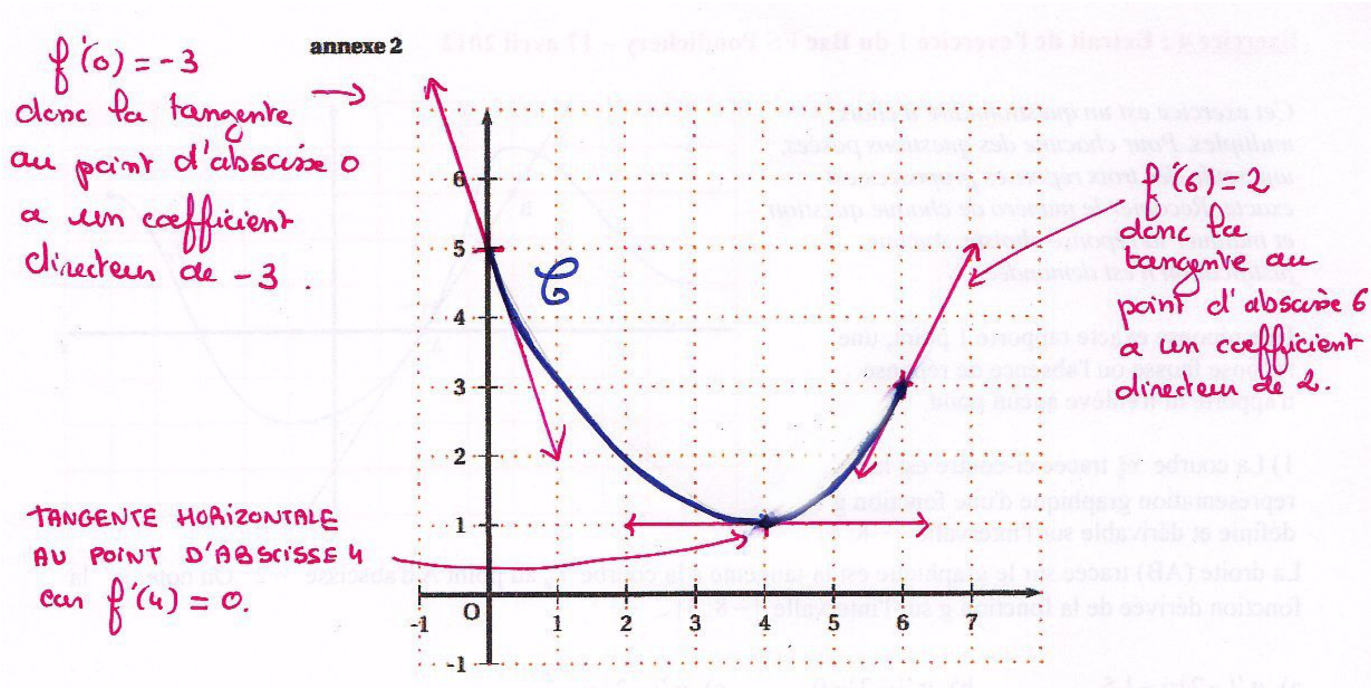
$B(15{,}3)=7\times 15{,}3-C(15{,}3)$
$B(15{,}3)=107{,}1-[10+0{,}25\times 15{,}3^2+4\times 15{,}3\times e^{[1-0{,}25\times 15{,}3]}]$
$B(15{,}3)=107{,}1-10-58{,}5225-61{,}2\times e^{-2{,}825}$
$B(15{,}3)=38{,}5775-61{,}2\times e^{-2{,}825}$
B(15,3) ≈ 34,948 Le bénéfice total pour 15,3 tonnes de détergent vendues sera d'environ $\boxed{34\ 948\ €}$.

Exercice 2 :
1) a)

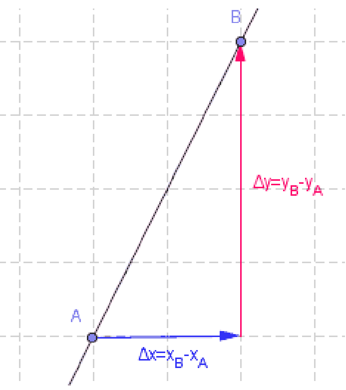
x	0		4		6
signe de $f'(x)$		–	0	+	
Variations de f	5	↘	1	↗	3

b) On sait que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 6 a un coefficient directeur de 2, car $f'(6)=2$.
Nommons (T_6) cette tangente. (T_6) admet donc une équation réduite de la forme $y=2x+p$.
On sait par ailleurs que le point de coordonnées (6;3) appartient à (T_6).
On a donc : $3=2\times 6+p \Leftrightarrow 3-12=p \Leftrightarrow -9=p$.
L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 6 est donc $\boxed{y=2x-9}$.

c)



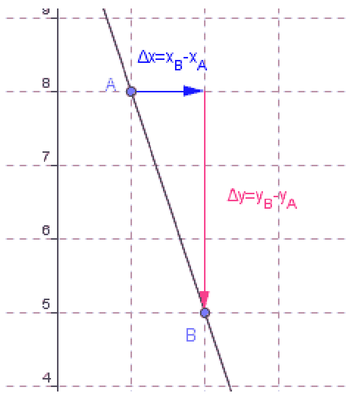
Petit rappel concernant les coefficients directeurs :



Droite de coefficient directeur 2.

Le coefficient directeur d'une droite, appelé aussi sa pente, se calcule par : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, ce qu'on peut comprendre par : $\dfrac{de\ combien\ on\ monte}{de\ combien\ on\ avance}$. Il est positif si la droite « monte » de gauche à droite, et négatif si la droite « descend » de gauche à droite.

Pour tracer une droite de coefficient directeur 2, on peut partir d'un point de la droite (par exemple (6;3) ci-dessus) , puis « avancer de 1 » et « monter de 2 » (point (7 ;5) ci-dessus)



Droite de coefficient directeur -3.

⚠ *Si le repère n'est pas orthonormé (= si l'unité n'est pas la même sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées), on ne peut plus se contenter de « compter les carreaux ». Il faut adapter en fonction des unités sur chaque axe.*

Exercice 3 : Extrait du bac ES Antilles-Guyane, septembre 2010.

Partie A : 1) f est définie sur [1;6] par $f(x)=ax+b-\dfrac{16}{x}$, où a et b sont des réels constants.
On admet que f est dérivable sur [1;6] et on note f' sa dérivée.

a) Par lecture graphique (on admettra pour la suite que ces valeurs lues sont bien les valeurs exactes), on obtient

4 renseignements : $\boxed{f(1)=0}$, $\boxed{f(2)=4}$, $\boxed{f(4)=0}$ et $\boxed{f'(2)=0}$ car on nous dit que la courbe admet une tangente horizontale (c'est-à-dire de coefficient directeur 0) en son point A d'abscisse 2.

b) Pour déterminer a et b, utilisons les renseignements obtenus par lecture graphique à la question 1. Deux de ces renseignements devraient suffire pour obtenir une valeur pour a et une pour b, mais il faudra vérifier que ces valeurs trouvées sont bien en cohérence avec les deux autres renseignements.

$f(1)=0 \Leftrightarrow a\times 1+b-\frac{16}{1}=0 \Leftrightarrow \boxed{a+b=16}$ (Équation 1)

$f(2)=4 \Leftrightarrow a\times 2+b-\frac{16}{2}=4 \Leftrightarrow 2a+b=4+8 \Leftrightarrow \boxed{2a+b=12}$ (Équation 2)

(Équation 1) $\Leftrightarrow b=16-a$. On remplace b par $16-a$ dans l'équation 2 :
$2a+(16-a)=12 \Leftrightarrow a+16=12 \Leftrightarrow \boxed{a=-4}$.

On remplace a par -4 dans l'équation 1, on trouve : $-4+b=16 \Leftrightarrow b=16+4 \Leftrightarrow \boxed{b=20}$.

À partir de maintenant, on suppose que $\boxed{f(x)=-4x+20-\frac{16}{x}}$ *(en jetant un œil à la question 2, on se dit que ces valeurs sont probablement les bonnes)* et on vérifie qu'on a bien $f(4)=0$ et $f'(2)=0$.
$f(4)=-4\times 4+20-\frac{16}{4}=-16+20-4=0$, OK.

Pour vérifier que $f'(2)=0$, on calcule $f'(x)$ pour tout x de [1;6] :
Pour tout x de [1;6], $f(x)=-4x+20-\frac{16}{x}=-4x+20-16\times\left(\frac{1}{x}\right)$.
Donc pour tout x de [1;6], $f'(x)=-4-16\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, soit $\boxed{f'(x)=-4+\frac{16}{x^2}}$.
Donc $f'(2)=-4+\frac{16}{2^2}=-4+\frac{16}{4}=-4+4$, on a bien $\boxed{f'(2)=0}$.

Bilan : on a bien $\boxed{a=-4}$ et $\boxed{b=20}$.

2) a) On a déjà calculé $\boxed{f'(x)=-4+\frac{16}{x^2}}$ à la question 1) b). *Mais pour étudier les variations de f, il nous faut étudier le signe de $f'(x)$, et pour cela transformer l'expression de $f'(x)$ en un quotient factorisé afin de pouvoir établir un tableau de signes (grâce à la règle des signes, qui ne s'applique que pour les produits et les quotients).*

Pour tout $x \in$ [1;6], $f'(x)=\frac{-4x^2}{x^2}+\frac{16}{x^2}$ en réduisant au même dénominateur.

$$f'(x)=\frac{-4x^2+16}{x^2}=\frac{-4(x^2-4)}{x^2},\ \boxed{f'(x)=\frac{-4(x+2)(x-2)}{x^2}}$$ [1].

x^2 est toujours positif ou nul, et ne s'annule que pour $x=0$, valeur qui n'est pas dans l'intervalle [1;6].
$x+2$ s'annule pour $x=-2$ et est strictement positif pour tout $x>-2$, donc $x+2>0$ pour x $\in$ [1;6].
$x-2$ s'annule pour $x=2$, est strictement positif pour $x>2$ et strictement négatif pour $x<2$.
-4 est toujours strictement négatif, indépendamment de x.

1 On rappelle la troisième identité remarquable : $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, donc $x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$

x	1		2		4		6
-4		$-$		$-$			
$x+2$		$+$		$+$			
$x-2$		$-$	0	$+$			
x^2		$+$		$+$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$			
f	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{20}{3}$

Calculons une valeur exacte de f(6) pour la faire figurer dans le tableau :

$f(6)=-4\times 6+20-\dfrac{16}{6}=-24+20-\dfrac{8}{3}=-4-\dfrac{8}{3}=-\dfrac{12}{3}-\dfrac{8}{3}$ $\qquad f(6)=-\dfrac{20}{3}$

c) Par lecture du tableau de variations (on peut préciser que comme la fonction f est continue et strictement décroissante sur [2;6], d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il ne peut exister qu'un seul antécédent de 0 dans [2;6], et on sait que cet antécédent est 4), on obtient le tableau de signes suivant :

x	1		4		6
signe de $f(x)$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 4 : Extrait de l'exercice 1 du bac ES Pondichéry du 17 avril 2012.

Bien que l'énoncé ne demande pas de justifications, on va les donner ici, ne serait-ce que parce qu'en cours d'année, il est probable que votre professeur les exige. Le jour du bac, vous pourrez vous en passer et faire confiance à l'énoncé.

1) Réponse a) car la droite (AB), tangente à $\mathscr{C}_g$ en A d'abscisse -2 , a pour coefficient directeur $-\dfrac{3}{2}=-1{,}5$:

En effet : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{3-0}{-4-(-2)}=\dfrac{3}{-2}=-1{,}5$ puisque A(-2;0) et B(-4;3). On a bien $\boxed{g'(-2)=-1{,}5}$.

Exercice 5 : Extrait de l'exercice 1 du bac ES Liban du 24 mai 2012.

1) Réponse c) En effet, sur la courbe, on indique deux tangentes horizontales, aux points d'abscisses -2 et 2. Il y a donc au moins deux solutions à l'équation $f'(x)=0$, -2. et 2. Comme une et une seule des 3 réponses proposées est correcte, c'est nécessairement la réponse c).

2) Réponse a) En effet, f , d'après sa courbe représentative, semble strictement décroissante sur [-5;-2] et sur [2;5], et strictement croissante sur [-2;2]. On sait aussi que $f'(x)$ ne s'annule qu'en $x=-2$ et en $x=2$. $f'(x)$ sera donc positif ou nulle si et seulement si x ∈ [-2;2].