Problème de probabilités du sujet BAC ES juin 2008 France métropolitaine.

Énoncé :

Le parc informatique d'un lycée est composé de 200 ordinateurs dont :

- 30 sont considérés comme neufs
- 90 sont considérés comme récents
- Les autres sont considérés comme plus anciens.

Une étude statistique indique que :

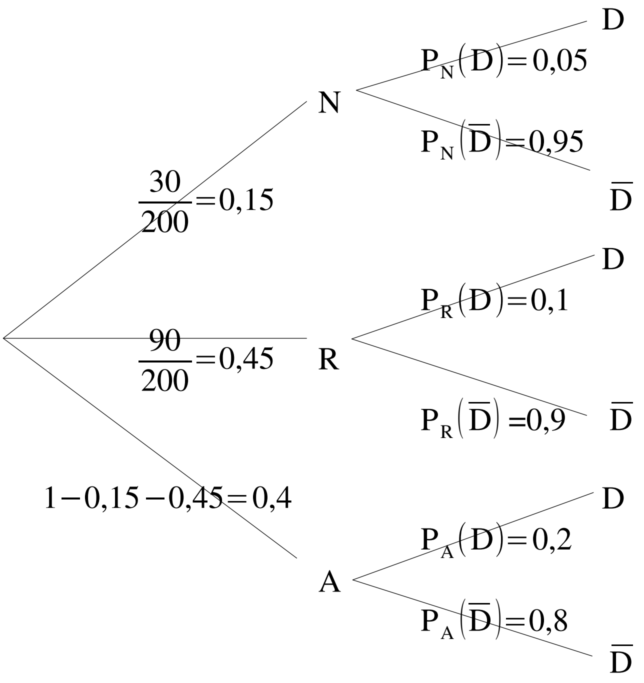
- 5 % des ordinateurs neufs sont défaillants.
- 10 % des ordinateurs récents sont défaillants.
- 20 % des ordinateurs anciens sont défaillants.

On choisit au hasard un ordinateur dans ce parc. On note les événements suivants :
N= « L'ordinateur est neuf. »
R= « l'ordinateur est récent »
A= « l'ordinateur est ancien »
D= « l'ordinateur est défaillant »
$\overline{D}$ est l'événement contraire de D.

1) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2) Calculer la probabilité que l'ordinateur choisi soit neuf et défaillant.
3) Démontrer que la probabilité que l'ordinateur choisi soit défaillant est égale à 0,1325.
4) Déterminer la probabilité que l'ordinateur soit ancien, sachant qu'il est défaillant. Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième.
5) Pour équiper le centre de ressources de l'établissement, on choisit au hasard 3 ordinateurs dans le parc. On admet que le parc est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise.
   Déterminer la probabilité qu'exactement un des ordinateurs choisis soit défaillant. Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième.

Corrigé :

1)



$P(N\cap D)=P(N)\times P_N(D)=0,15\times 0,05=0,0075$

$P(N\cap \overline{D})=P(N)\times P_N(\overline{D})=0,15\times 0,95=0,1425$

$P(R\cap D)=P(R)\times P_R(D)=0,45\times 0,1=0,045$

$P(R\cap \overline{D})=P(R)\times P_R(\overline{D})=0,45\times 0,9=0,405$

$P(A\cap D)=P(A)\times P_A(D)=0,4\times 0,2=0,08$

$P(A\cap \overline{D})=P(A)\times P_A(D)=0,4\times 0,8=0,32$

Remarque : pour calculer P(A), on peut aussi calculer $\dfrac{200-30-90}{200}=\dfrac{80}{200}=0{,}4$

2) $P(N\cap D)=\dfrac{30}{200}\times 5=0{,}15\times 0{,}05=0{,}0075$ $\boxed{P(N\cap D)=0{,}0075}$.

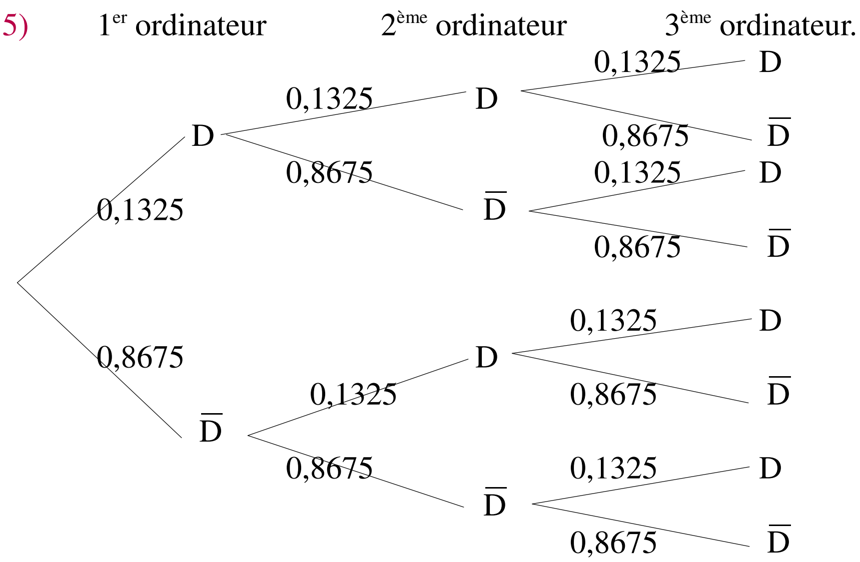
3) On utilise la formule de probabilité totale pour calculer P(D), sachant que N, R et A forment une partition de l'ensemble des possibles :

$P(D)=P(N\cap D)+P(R\cap D)+P(A\cap D)=0{,}0075+0{,}045+0{,}08$ $\boxed{P(D)=0{,}1325}$.

4) $P_D(A)=\dfrac{P(D\cap A)}{P(D)}=\dfrac{0{,}08}{0{,}1325}$ $\boxed{P_D(A)\approx 0{,}60}$.

La probabilité pour qu'un ordinateur soit ancien sachant qu'il est défaillant est d'environ 0,60.

5)



Dans l'arbre ci-contre, 3 chemins correspondent à la situation « un exactement des trois ordinateurs est défaillant. » :

$D\,\overline{D}\,\overline{D}$, $\overline{D}\,D\,\overline{D}$ et $\overline{D}\,\overline{D}\,D$.

Ces trois chemins ont tous trois une pondération de $0{,}1325\times 0{,}8675\times 0{,}8675$.

La probabilité pour qu'un exactement des trois ordinateurs soit défaillant est donc de $3\times 0{,}1325\times 0{,}8675^2$, c'est-à-dire environ 0,30.

Si on est familiarisé avec la loi binomiale, on peut se servir du fait qu'on se trouve dans un schéma de Bernoulli de paramètres $n=3$ et $p=0{,}1325$ (les 3 tirages indépendants avec remise sont des épreuves de Bernoulli avec la probabilité 0,1325 d'obtenir un ordinateur défectueux).

La variable aléatoire qui donne le nombre d'ordinateurs défectueux suit donc une loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=0{,}1325$.

La probabilité pour que cette variable aléatoire vaille 1, c'est-à-dire pour qu'exactement un des trois ordinateurs soit défectueux est donc $\binom{3}{1}\times 0{,}1325^1\times(1-0{,}1325)^{3-1}=3\times 0{,}1325\times 0{,}8675^2\approx 0{,}30$,