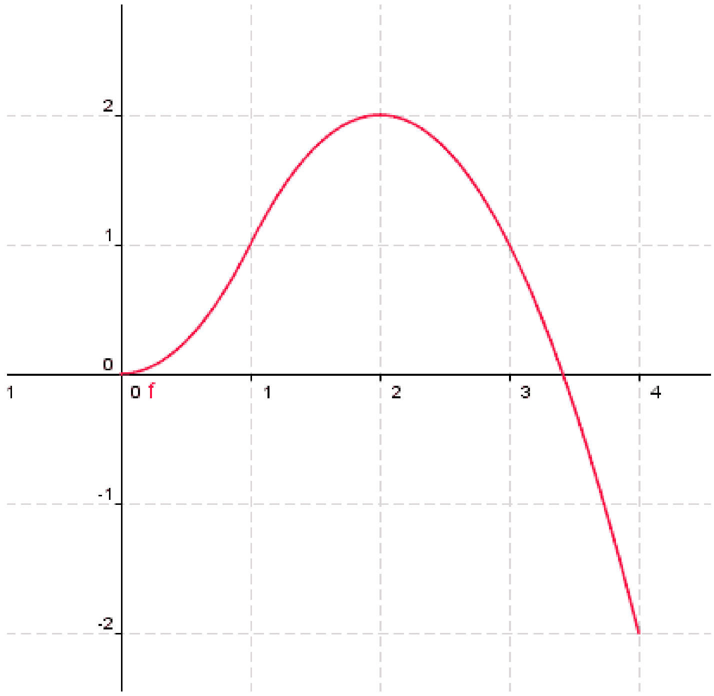
Exercice 1 : On donne ci-contre la courbe représentant une fonction f définie sur l'intervalle [0;4].

f est définie par : $\begin{cases} f(x)=x^2 \; si \; x \in [0;1[\\ f(x)=2-(x-2)^2 \; si \; x \in [1;4] \end{cases}$

On admet que *f* est continue en 1.



1) Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe :
   a) pour x ∈ [0;1[
   b) pour x ∈ [1;4]

2) En déduire le tableau de variations de f sur [0;4]. Est-il conforme à l'allure de la courbe ci-contre ?

3) Expliquer pourquoi *f* est continue sur [0;4].

4) a) Prouver qu'il existe deux valeurs de x, 0 et α dans [0;4], telles que $f(x)=0$.
   b) Calculer la valeur exacte de α.

5) Prouver que l'équation f(x)=1 a deux solutions sur [0;4], puis calculer ces deux valeurs. Est-ce conforme à ce qu'on peut lire sur le graphique ?

Exercice 2 : On définit une fonction f sur l'intervalle [-1;2] de la manière suivante :

$\begin{cases} \text{si } x \in [-1;0[, & f(x)=x \\ \text{si } x \in [0;1[, & f(x)=x^2 \\ \text{si } x \in [1;2], & f(x)=-x+2 \end{cases}$

On admet que f est continue sur [-1;2]
(vous le vérifierez graphiquement en construisant la courbe)

1) Dresser le tableau de variations de f, puis construire sa courbe sur [-1;2]

2) Tout nombre de l'intervalle [-1;1] admet-il un antécédent et un seul ?

3) On considère l'équation (E) $f(x)=\frac{1}{4}$. Combien cette équation admet-elle de solutions (justifier à chaque fois):

   a) Dans l'intervalle [0;1]
   b) Dans l'intervalle [-1;2]
   c) Faire une lecture graphique des valeurs approchées des solutions de cette équation dans [-1;2], puis calculer leurs valeurs exactes.

Exercice 3 : dans chaque cas, calculer $f'(x)$, étudier le sens de variations de f sur l'intervalle I, et prouver que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur I. A l'aide de votre calculatrice, donner un intervalle d'amplitude 10^{-1} dans lequel se situe α.

1) $f(x)=x^3+12x-1$ I=[0;1]

2) $f(x)=x^2+\sqrt{x}-3$ I=[1;2]

3) $f(x)=x^3-\frac{3}{x}+1$ I=[1;2]

Exercice 4 : On se propose de résoudre dans ℝ l'équation $2x^3-6x+1=0$ et l'inéquation $2x^3-6x+1\geqslant 0$.

Partie A : équation $2x^3-6x+1=0$.

Soit la fonction f : x $\mapsto$ $2x^3-6x+1$

1) Dresser le tableau de variations de f à partir du signe de $f'(x)$.

2) Montrer que dans l'intervalle [-1;1], l'équation $2x^3-6x+1=0$ admet une unique solution β.

3) a) Trouver un nombre a inférieur à -1 tel que $f(a)<0$.
b) Montrer que sur l'intervalle]–∞;-1[, l'équation $2x^3-6x+1=0$ admet une solution unique α.

4) Utiliser la méthode précédente pour montrer que sur l'intervalle]1;+∞[, l'équation $2x^3-6x+1=0$ admet une unique solution γ.

5) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune des trois solutions α, β et γ de l'équation $2x^3-6x+1=0$.

Partie B : Inéquation $2x^3-6x+1\geqslant 0$.

En utilisant les variations de *f* et les valeurs α, β et γ, résoudre l'inéquation $2x^3-6x+1\geqslant 0$.

Exercice 5 : On souhaite obtenir les variations de la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+2x+1}$.

1) Étude de la dérivée de f .

a) Déterminer Df , l'ensemble de définition de f .
b) Vérifier que, pour tout $x\in$ Df , $f'(x)=\dfrac{x^3+3x^2+2}{(x+1)^3}$
c) Expliquer comment, connaissant le signe de $g(x)=x^3+3x^2+2$, on peut en déduire celui de $f'(x)$.

2) Étude du signe de $g(x)$.

a) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variations de g .

c) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution et une seule, que l'on nommera α, dans l'intervalle [-4;-3], et que, dans ℝ, cette équation n'a pas d'autre solution.
À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

d) Dresser le tableau de signes de $g(x)$.

3) Tableau de variations de f .

a) Déduire des questions précédentes le tableau de signes de $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de *f*.