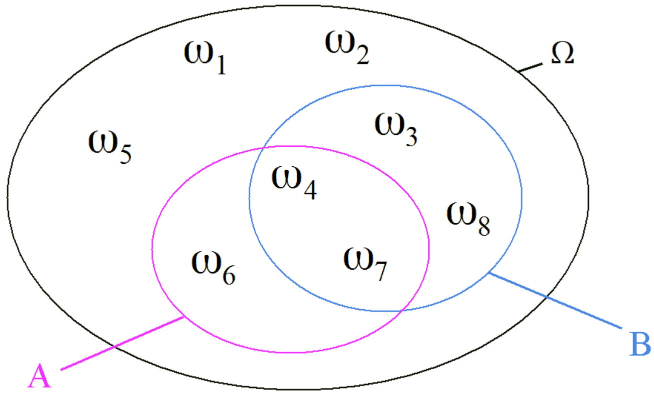
Révisions sur le chapitre : Probabilités conditionnelles, indépendance, loi binomiale.

Généralités sur les probabilités :

Dans une expérience aléatoire d'univers Ω,

L'intersection de deux événements A et B, notée **A∩B** (« A inter B » ou « A et B ») est l'ensemble des issues qui sont à la fois dans A et dans B. (à la fois dans le rose et dans le bleu. Ci-contre : $A \cap B = \{\omega_4 ; \omega_7\}$)

La réunion de deux événements A et B, notée **A∪B** (« A union B » ou « A ou B ») est l'ensemble des événements qui est au moins dans l'un des deux, voire dans les deux. (Au moins d'une des deux couleurs)
Ci-contre : $A \cup B = \{\omega_3 ; \omega_4 ; \omega_6 ; \omega_7 ; \omega_8\}$



Un événement certain = un événement qui contient toutes les issues.
Un événement impossible = un événement qui ne contient aucune issue.
Un événement élémentaire = un événement qui contient une issue et une seule.

A et B sont des événements incompatibles lorsque leur intersection est vide.

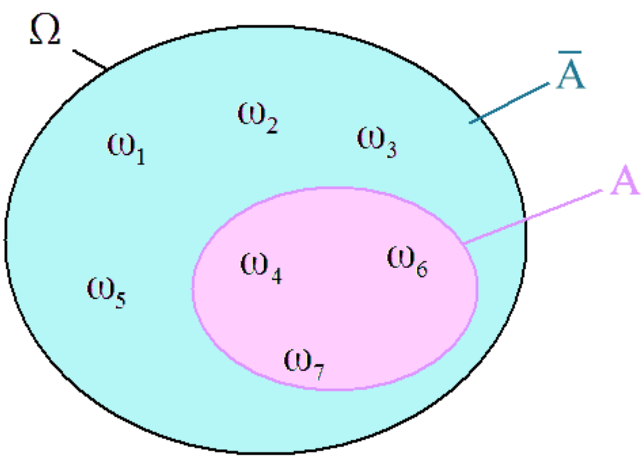
L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$, est l'événement qui contient toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A.

Formules de calcul de probabilités à connaître :

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Lorsque A et B sont incompatibles, on a :
$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$ car A∩B=Ø.



On est dans une **situation d'équiprobabilité** lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisés.

Dans une situation d'équiprobabilité, on a $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$, c'est-à-dire $\dfrac{nombre\ d'issues\ dans\ A}{nombre\ d'issues\ dans\ \Omega}$

Probabilités conditionnelles :

Soient A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$.

La probabilité de A sachant B est $\boxed{P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$. On a donc $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$

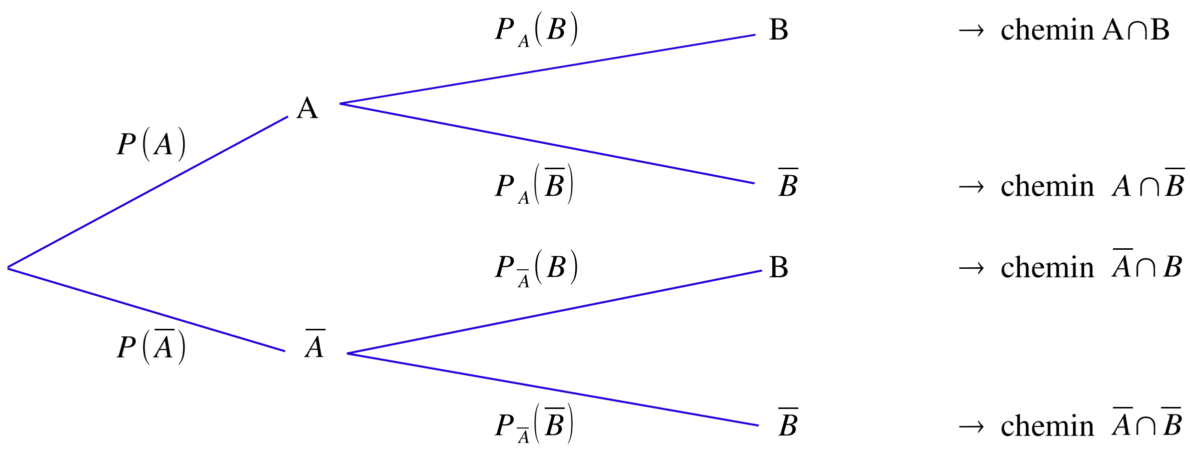
Si, de plus, $P(A) = 0$, on peut écrire $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ donc $P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$.

Arbre de probabilités :

Vocabulaire :

- Une **branche** est représentée par un segment et porte une probabilité.
- Un **nœud** est la jonction de plusieurs branches
- Un **chemin** est l'événement réalisé en suivant des branches successives.

Exemple :



Règles de calcul dans un arbre pondéré :

- *La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.*
- *La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées sur ses branches.*

Par exemple : $P(A\cap\overline{B})=P(A)\times P_A(\overline{B})$

- *La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.*

Dans notre exemple : $P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$

En particulier : la somme des probabilités de tous les chemins est égale à $P(\Omega)=1$.

Événements indépendants

Deux **événements** A et B sont **indépendants** si et seulement si $\boxed{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$.

Cela correspond au cas où la réalisation de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre.

Par exemple, si A et B sont indépendants, alors $P_B(A)=P(A)$ car la réalisation de A ne dépend pas du fait que B ait été réalisé ou non.

Formule de probabilités totales :

Des événements A_1 , A_2 … A_n forment une **partition de Ω** lorsque :

- Ils sont deux à deux incompatibles.
- Leur réunion est Ω

Exemple : si dans une classe, chaque élève pratique une et une seule des 3 activités : théâtre, musique, dessin, si on note T l'ensemble des élèves qui font du théâtre, M l'ensemble des élèves qui font de la musique et D l'ensemble des élèves qui font du dessin, alors les ensembles T, M et D forment une partition de la classe.

Formule de probabilités totales : Si A_1 , A_2 … A_n forment une partition de Ω, on peut calculer la probabilité de n'importe quel événement B grâce à la formule : $\boxed{P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+...+P(A_n\cap B)}$.

Variable aléatoire :

Lorsqu'à chaque issue d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel, on dit qu'**on définit une variable aléatoire**.

Exemple : on lance trois pièces équilibrées, on note X le nombre de « pile » obtenus. X est une variable aléatoire.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire X : lorsqu'à chaque valeur possible de X on associe sa probabilité, on dit qu'**on définit la loi de probabilité de X**.

Dans notre exemple :

Valeurs pouvant être prises par X :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Probabilité de chacune de ces valeurs
(La somme de ces probabilités vaut 1)

Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire.

Soit X une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs x_1, x_2, … x_n,
telle que $P(X=x_1)=p_1$, $P(X=x_2)=p_2$, … $P(X=P_n)=x_n$.

L'espérance de X est $\boxed{E(X)=p_1 x_1+p_2 x_2+...+p_n x_n}$

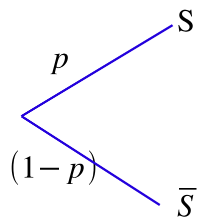
La variance de X est $\boxed{V(X)=p_1(x_1-E(X))^2+p_2(x_2-E(X))^2+\ldots+p_n(x_n-E(X))^2}$

L'écart-type de X est $\boxed{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$

Loi de Bernoulli. Loi binomiale.

Une **expérience de Bernoulli** de **paramètre** $\boxed{p}$ est une expérience *à deux issues possibles* dont l'une, S, considérée comme « succès », a la probabilité p d'être réalisée.

L'autre issue, $\overline{S}$, considérée comme « échec », a donc la probabilité $(1-p)$ d'être réalisée.



Lorsqu'on répète n fois, de manière indépendante, la même expérience de Bernoulli de paramètre p, on réalise un **schéma de Bernoulli** de paramètres $\boxed{n}$ et $\boxed{p}$.

Lorsque, dans un schéma de Bernoulli, on établit une variable aléatoire X qui correspond au nombre de succès obtenus sur les n expériences, alors X suit une **loi binomiale** de paramètres $\boxed{n}$ et $\boxed{p}$.

Dans une loi binomiale, la probabilité d'obtenir exactement k succès est donnée par la formule :

$$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}}$$

Le nombre $\boxed{\binom{n}{k}}$ est le **coefficient binomial** appelé « k parmi n » qui est égal au nombre de chemins qui mène à k succès sur les n expériences dans l'arbre pondéré qui représente le schéma de Bernoulli.

Il est donné par la calculatrice casio dans le menu « probabilités » par la touche **C**.

Par exemple, pour calculer $\binom{10}{4}$, on tape 10**C**4.

Exemple : on lance 4 fois de suite un dé cubique équilibré et on note X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où l'on obtient un multiple de 3.

Chaque lancer est une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$ car on a a la probabilité de $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ d'obtenir un « succès » (un multiple de 3).

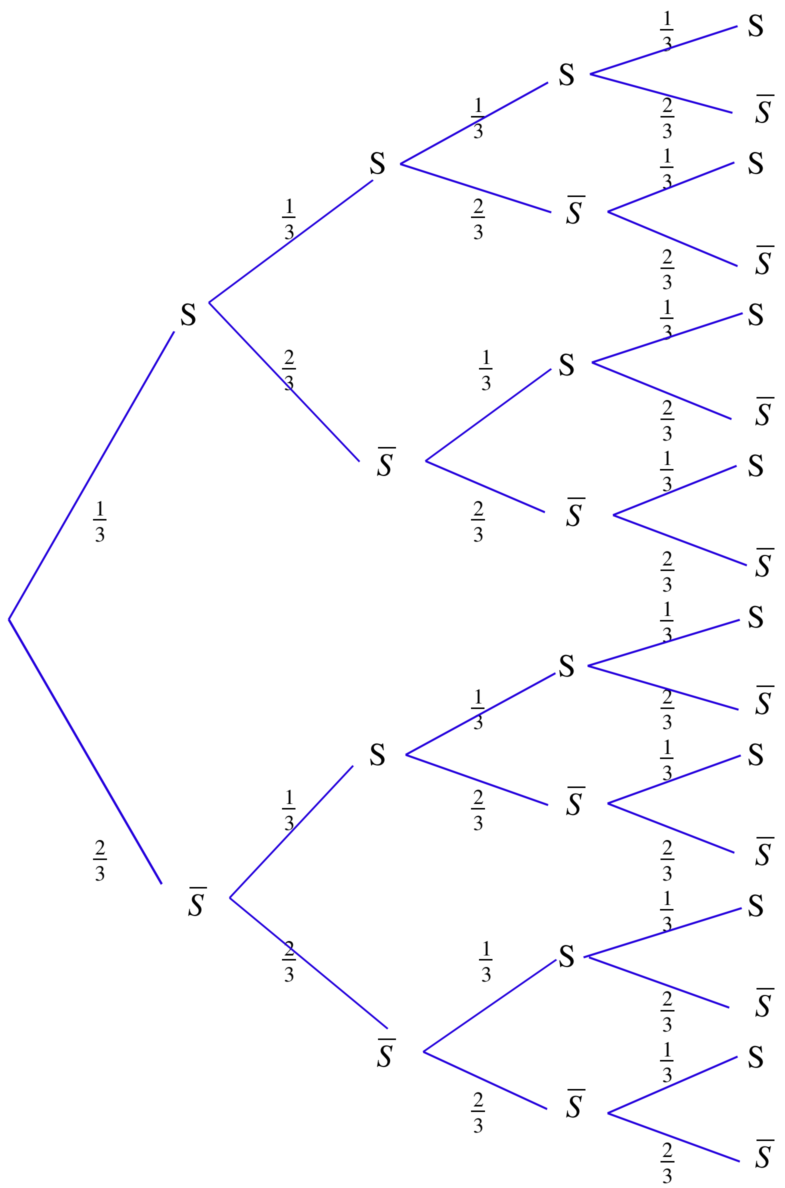
Comme on effectue une série de 4 lancers supposés indépendants, on réalise un schéma de Bernoulli de paramètres $n=4$ et $p=\frac{1}{3}$.

Comme X donne le nombre de multiples de 3 obtenus sur les 4 lancers, X suit une loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=\frac{1}{3}$.

On a : $P(X=2)=\binom{4}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$P(X=2)=6\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$

Car 6 chemins comportent exactement 2 succès (et donc 2 échecs car $4-2=2$), et car chaque branche menant à un succès porte une probabilité de $\frac{1}{3}$ et chaque branche menant à un échec porte une probabilité de $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.



On a aussi : $P(X=3)=\binom{4}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=4\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^1$ car 4 chemins comportent exactement 3 succès (donc un échec), et car chaque branche menant à un succès porte une probabilité de $\frac{1}{3}$ et chaque branche menant à un échec porte une probabilité de $\frac{2}{3}$.