Terminale ES – L'essentiel sur les suites pour traiter les problèmes.

Sens de variations d'une suite :

Pour prouver qu'une suite (u_n) est strictement croissante,
on prouve que : $\forall n$, $\boxed{u_{n+1} > u_n}$ ou que $\forall n$, $\boxed{u_{n+1} - u_n > 0}$.

Pour prouver qu'une suite (u_n) est strictement décroissante,
on prouve que : $\forall n$, $\boxed{u_{n+1} < u_n}$ ou que $\forall n$, $\boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$.

Suites arithmétiques :

Pour prouver qu'une suite (u_n) est arithmétique, on prouve :
Soit qu'il existe un réel r tel que $\forall n$, $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$
Soit que $\forall n$, $\boxed{u_{n+1} - u_n}$ est une constante r.

Bien évidemment, si $r > 0$, (u_n) est strictement croissante, et si $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante.

Le terme général d'une suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r est $\boxed{u_n = u_0 + n \times r}$.[1]

Différence entre deux termes d'une suite arithmétique de raison r : $\boxed{u_m - u_p = (m-p) \times r}$

Suites géométriques :

Pour prouver qu'une suite (u_n) est géométrique, on prouve :
Soit qu'il existe un réel q tel que $\forall n$, $\boxed{u_{n+1} = q \times u_n}$.
Soit que le terme général de la suite est de la forme $\boxed{b \times a^n}$ $\forall n$.

Le terme général d'une suite géométrique de terme initial u_0 et de raison q est : $u_n = u_0 \times q^n$.[2]

Sens de variation et convergence des suites géométriques à termes positifs :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme strictement positif et de raison q>0 :

- Si $\boxed{0 < q < 1}$, (u_n) est strictement décroissante et converge vers 0.
- Si $q = 1$, (u_n) est constante (elle converge alors vers cette constante).
- Si $\boxed{q > 1}$, (u_n) est strictement croissante et diverge vers $\boxed{+\infty}$

Somme des n+1 premières puissances de q :

Soit q≠1. Alors $\boxed{1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$

1 Si le terme initial est u_1, $u_n = u_1 + (n-1)r$.
2 Si le terme initial est u_1, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Opérations sur les limites :

- Si $\boxed{\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty}$, alors si $\boxed{a>0}$, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a\times q^n=+\infty}$ et si $\boxed{a<0}$, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a\times q^n=-\infty}$.
- Si $\boxed{\lim_{n\to+\infty} q^n=\mathrm{L}}$ (L ∈ ℝ), alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a\times q^n=a\times\mathrm{L}}$.

Et si vous cherchez la limite de $b+a\times q^n$, il vous suffit d'ajouter *b* au résultat trouvé pour $\lim_{n\to+\infty} a\times q^n$, sachant que si on ajoute un réel à $+\infty$ ou $-\infty$, ça reste $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemples :

1) On veut connaître la limite de la suite (u_n) telle que ∀ n, $u_n=10-3\times0{,}8^n$.
$\lim_{n\to+\infty} 0{,}8^n=0$ car $0<0{,}8<1$, donc $\lim_{n\to+\infty} -3\times0{,}8^n=-3\times0=0$ donc $\lim_{n\to+\infty} 10-3\times0{,}8^n=10+0=10$.

2) On veut connaître la limite de la suite (v_n) telle que ∀ n, $v_n=15-3\times2^n$:
$\lim_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$ car $2>1$, donc $\lim_{n\to+\infty} -3\times2^n=-\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} 15-3\times2^n=-\infty$. (Même si on ajoute 15 à $-\infty$, ça reste $-\infty$)

Exercice 1 (Exercice-type avec des valeurs simples, pour comprendre comment on se ramène à une suite géométrique pour étudier une suite arithmético-géométrique) :

(u_n) est la suite définie sur ℕ par $u_0=1$ et ∀ n ∈ ℕ, $\boxed{u_{n+1}=2u_n-3}$. [3]

1) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

2) On pose, pour tout n ∈ ℕ, $v_n=u_n-3$.
 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 2. [4]
 b) Exprimer v_n en fonction de *n*. [5]

3) Exprimer u_n en fonction de *n*. [6]

4) Déterminer la limite de la suite (u_n). [7]

Exercice 2 : (Problème de bac-type, avec une évolution en pourcentage et un ajout constant pour former une suite arithmético-géométrique)

Dans un village, l'association de gymnastique comptait 50 adhérents en 2006.
Depuis cette date, la trésorière a remarqué que, chaque année, elle reçoit 18 nouvelles adhésions et que 15% des anciens inscrits ne se réinscrivent pas, tandis que les autres renouvellent leur adhésion.
On note u_n le nombre d'adhérents pour l'année $2006+n$.
1) Que vaut u_0 et que vaut, pour tout entier n, u_{n+1} en fonction de u_n ? [8]
2) On pose pour tout entier n, $v_n=u_n-120$. a) Montrer que (v_n) est géométrique, préciser sa raison et son terme initial. b) Montrer que pour tout entier n, $u_n=120-70\times0{,}85^n$ c) Étudier le sens de variations de la suite (u_n). d) Montrer que pour $n\geqslant20$, $117\leqslant u_n<120$ et interpréter ce résultat.
Et la représentation graphique ? Certains problèmes nous demandent de faire une représentation graphique d'une suite pour conjecturer sa limite.

---

3 C'est une suite arithmético-géométrique car elle est définie par une relation de récurrence du type : $u_{n+1}=au_n+b$ ∀ n.
Remarque : la suite géométrique associée aura pour raison *a*.

4 La procédure est toujours la même : **1-** On exprime v_{n+1} en fonction de u_{n+1}. **2-** On remplace u_{n+1} par sa valeur en fonction de u_n **3-** On factorise l'expression obtenue par la raison (ici : 2) **4-** On obtient $v_{n+1}=v_n\times raison$ en remplaçant, ici, u_n-3 par v_n.

5 Utiliser la formule du terme général d'une suite géométrique.

6 Remarquer que si, pour tout n, $v_n=u_n-3$, alors, pour tout n, $u_n=v_n+3$.

7 Procéder comme dans les exemples ci-dessus.

8 On obtient une relation du type $u_{n+1}=a\times u_n+b$. La raison de la suite géométrique associée sera a, qui est le coefficient multiplicatif de l'évolution en pourcentage : (1+t%) pour une augmentation de t% , (1-t%) pour une diminution de t%.

Il s'agit de suites arithmético-géométriques définies par une relation de récurrence du type : ∀ n, $\boxed{u_{n+1}=au_n+b}$. On nous donne aussi son terme initial.

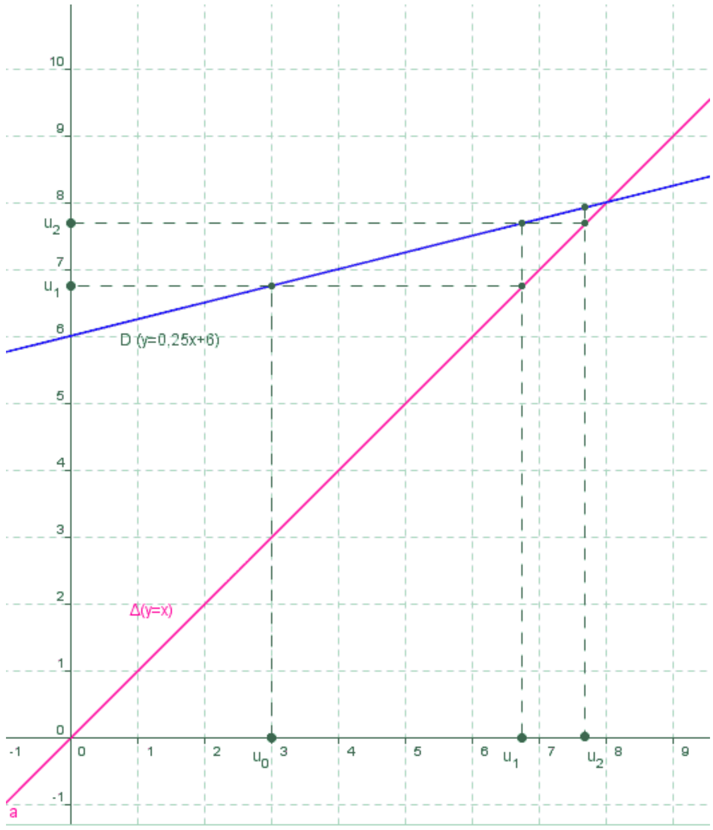
On trace :

- La droite d'équation $\boxed{y=ax+b}$ (notons-la D)
- La droite d'équation $\boxed{y=x}$ (notons-la Δ)

On nous demande de représenter les premiers termes de la suite : on place u_0 sur l'axe des abscisses.
Le point de D d'abscisse u_0 aura pour ordonnée u_1.
Pour placer u_1 en abscisse, on utilise la droite Δ.
Puis on trouve u_2 en ordonnées à l'aide de la droite D, et on continue de la même manière.

La limite à trouver est l'abscisse du point d'intersection des deux droites !

Exemple ci-contre avec $u_0=3$, $a=0{,}25$ et $b=6$.



<u>L'énoncé du problème associé à ce graphique pourrait être</u> :

<u>Exercice 3</u> : (u_n) est la suite définie sur ℕ par $u_0=3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+6$.

Partie A : Étude graphique.

1) Dans un repère orthonormé (d'unité 1 ou 2 cm au choix), tracer les droites D d'équation $y=\frac{1}{4}x+6$ et Δ d'équation $y=x$.
2) Représenter dans ce repère les nombres u_0, u_1, u_2 et u_3.
3) Conjecturer le sens de variations et la limite de la suite (u_n).

Partie B : Étude calculatoire.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3. Les valeurs calculées semblent-elles coïncider avec les nombres construits partie A ?

2) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=u_n-8$.
   a) Prouver que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer, pour tout n, v_n en fonction de n.
   c) Exprimer, pour tout n, u_n en fonction de n.
   d) Quelles sont les limites des suites (v_n) et (u_n) ? La limite de (u_n) trouvée dans la partie B coïncide-t-elle avec celle que vous avez conjecturée dans la partie A ?

3) Étudier le sens de variations de la suite (u_n). Correspond-il à la conjecture de la partie A ?

Corrigés des exercices :

Exercice 1 (u_n) est la suite définie sur ℕ par $u_0=1$ et $\forall\ n\ \in ℕ$, $\boxed{u_{n+1}=2u_n-3}$.

1) $u_1=2u_0-3=2\times1-3=-1$ $\quad u_2=2u_1-3=2\times(-1)-3=-2-3=-5$
$u_3=2u_2-3=2\times(-5)-3=-10-3=-13$ $\quad u_4=2u_3-3=2\times(-13)-3=-26-3=-29$

2) On pose, pour tout $n\ \in ℕ$, $v_n=u_n-3$.

a) On va essayer de montrer qu'il existe un réel q tel que, pour tout n, $v_{n+1}=q\times v_n$.
On s'attend à ce que ce réel q soit 2, car dans la relation de récurrence qui relie u_{n+1} à u_n, de la forme $u_{n+1}=au_n+b$, on a $a=2$.

- On écrit v_{n+1} en fonction de u_{n+1} : Pour tout n , $v_{n+1}=u_{n+1}-3$.
- On remplace u_{n+1} par sa formule en fonction de u_n : Pour tout n, $v_{n+1}=(2u_n-3)-3=2u_n-6$.
- On factorise par 2 : Pour tout n, $v_{n+1}=2\times u_n-2\times3=2(u_n-3)$
- On remplace u_n-3 par v_n : Pour tout n, $\boxed{v_{n+1}=2v_n}$.

On vient de prouver que (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

On calcule son terme initial : $v_0=u_0-3=1-3=-2$.

b) Pour exprimer v_n en fonction de *n*, on utilise la formule du terme général d'une suite géométrique :

On sait que si (v_n) est une suite géométrique de terme initial v_0 et de raison q , on a, pour tout n, $v_n=v_0\times q^n$.

Ici, avec $v_0=-2$ et $q=2$, on a, pour tout entier n , $\boxed{v_n=-2\times2^n}$.

3) Pour exprimer u_n en fonction de *n*, on utilise la relation qui relie u_n et v_n pour tout n :
Pour tout entier n , on a : $v_n=u_n-3 \Leftrightarrow v_n+3=u_n$.
Donc pour tout entier n , on a $u_n=v_n+3$, soit $\boxed{u_n=-2\times2^n+3}$, en utilisant la formule de v_n en fonction de n .

4) On vient de prouver que, pour tout $n\ \in ℕ$, $u_n=-2\times2^n+3$.
Comme $2>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$. $\qquad$ Comme $-2<0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -2\times2^n=-\infty$.
Et comme « on ne change pas l'infini si on lui ajoute 3 » : $\lim\limits_{n\to+\infty} -2\times2^n+3=-\infty$.

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty}$.

Exercice 2 : 1) $\boxed{u_0=50}$ car l'association compte 50 adhérents en 2006.
Pour tout n , $\boxed{u_{n+1}=0{,}85u_n+18}$. Le 18 correspond au nombre de nouvelles adhésions chaque année. Le 0,85 aux 85 % d'anciens adhérents qui renouvellent leur abonnement.

2) On pose pour tout entier n, $v_n=u_n-120$.

a) On réitère le même cheminement que dans l'exercice précédent :

- On exprime v_{n+1} en fonction de u_{n+1} : Pour tout entier n, $v_{n+1}=u_{n+1}-120$.
- On remplace u_{n+1} par sa formule en fonction de u_n : $v_{n+1}=0{,}85u_n+18-120=0{,}85u_n-102$

- On factorise par le coefficient de u_n : Pour tout n, $v_{n+1}=0{,}85\times u_n-0{,}85\times 120=0{,}85(u_n-120)$
- On remplace u_n-120 par v_n : Pour tout entier n, $v_{n+1}=0{,}85\,v_n$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85.

Son terme initial est $v_0=u_0-120=50-120=-70$.

b) Comme (v_n) est une suite géométrique de terme initial -70 et de raison $0{,}85$, pour tout entier n , on a $v_n=-70\times 0{,}85^n$.

Comme pour tout entier n , on a $v_n=u_n-120 \Leftrightarrow v_n+120=u_n \Leftrightarrow u_n=v_n+120$.
Donc pour tout entier n , $u_n=-70\times 0{,}85^n+120$ ou encore $\boxed{u_n=120-70\times 0{,}85^n}$.

c) Pour tout n, $u_{n+1}-u_n=(120-70\times 0{,}85^{n+1})-(120-70\times 0{,}85^n)$

$$u_{n+1}-u_n=120-70\times 0{,}85^{n+1}-120+70\times 0{,}85^n$$
$$u_{n+1}-u_n=-70\times 0{,}85^{n+1}+70\times 0{,}85^n$$
$$u_{n+1}-u_n=70\times 0{,}85^n-70\times 0{,}85^{n+1}$$
$$u_{n+1}-u_n=70\times 0{,}85^n\times 1-70\times 0{,}85^n\times 0{,}85 \quad (\text{car } 0{,}85^{n+1}=0{,}85^n\times 0{,}85^1\ )$$
$$u_{n+1}-u_n=70\times 0{,}85^n\times(1-0{,}85)$$
$$u_{n+1}-u_n=70\times 0{,}85^n\times 0{,}15$$

La différence $u_{n+1}-u_n$ est le produit de trois nombres strictement positifs. Donc, d'après la règle des signes, il est strictement positif.

Donc pour tout entier n , $u_{n+1}-u_n>0 \Leftrightarrow u_{n+1}>u_n$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

d) Il est facile de montrer que pour tout entier n, $\boxed{u_n<120}$.
En effet : Pour tout entier n, $u_n=120-70\times 0{,}85^n$.
$70\times 0{,}85^n>0$ donc $-70\times 0{,}85^n<0$, donc, en additionnant 120 aux deux membres de cette inégalité : $120-70\times 0{,}85^n<120$, soit $u_n<120$.

Maintenant, pour montrer que si $n\geqslant 20$, $u_n\leqslant 117$, on utilise le fait que la suite (u_n) est strictement croissante.
On calcule $u_{20}=120-70\times 0{,}85^{20}\approx 117{,}3$, donc $u_{20}>117$, et, comme la suite (u_n) est strictement croissante, pour tout $n\geqslant 20$, on aura $u_n\geqslant u_{20}>117$ donc $u_{20}>117$.

On a bien, pour tout $\boxed{n\geqslant 20}$, $\boxed{117\leqslant u_n<120}$, et même $117<u_n<120$.

Interprétation : $2006+20=2026$. Si ce type d'évolution se confirme sur 20 ans, en 2026 et au-delà, l'association comptera plus de 117 adhérents, mais ne dépassera jamais 120 adhérents.

Exercice 3 : (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+6$.

Partie A : Étude graphique.

1) et 2) Voir le graphique page 3.

3) Il semble que la suite (u_n) soit croissante, car sur l'axe des abscisses, u_0 , u_1 , u_2 … apparaissent dans cet ordre. Le point d'intersection de D et de Δ a pour coordonnées (8;8). Les points de D d'abscisses u_n semblent s'accumuler vers ce point d'intersection. On conjecture donc que $\lim_{n\to+\infty} u_n=8$.

Partie B : Étude calculatoire.

1) $u_1=\frac{1}{4}u_0+6=\frac{1}{4}\times3+6=\frac{3}{4}+\frac{24}{4}=\frac{27}{4}$ $\quad u_1=6{,}75$

$u_2=\frac{1}{4}u_1+6=\frac{1}{4}\times\frac{27}{4}+6=\frac{27}{16}+\frac{96}{16}=\frac{123}{16}$ $\quad u_2\approx7{,}69$

$u_3=\frac{1}{4}u_2+6=\frac{1}{4}\times\frac{123}{16}+6=\frac{123}{64}+\frac{384}{64}=\frac{507}{64}$ $\quad u_3\approx7{,}92$

Oui, ces valeurs semblent correspondre aux nombres construits sur le graphique.

2) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n=u_n-8$.

a) On procède comme dans les deux exercices précédents :

- On exprime v_{n+1} en fonction de u_{n+1} : $\forall\ n\ \in\mathbb{N},\ v_{n+1}=u_{n+1}-8$.
- On remplace u_{n+1} par sa formule en fonction de u_n : $\forall\ n\ \in\mathbb{N},\ v_{n+1}=\left(\frac{1}{4}u_n+6\right)-8=\frac{1}{4}u_n-2$.
- On factorise par le coefficient de u_n : $\forall\ n\ \in\mathbb{N},\ v_{n+1}=\frac{1}{4}\times u_n-\frac{1}{4}\times8=\frac{1}{4}(u_n-8)$
- On remplace u_n-8 par v_n : $\forall\ n\ \in\mathbb{N},\ \boxed{v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n}$.

Ceci prouve que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$. Son terme initial est $v_0=u_0-8=3-8=-5$.

b) Comme (v_n) est une suite géométrique de terme initial -5 et de raison $\frac{1}{4}$,

pour tout entier n , on a $v_n=v_0\times raison^n$, soit $\boxed{v_n=-5\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}$, ou $\boxed{v_n=-5\times0{,}25^n}$.

c) Pour tout entier n , $v_n=u_n-8$ donc $u_n=v_n+8$, donc $\boxed{u_n=-5\times0{,}25^n+8}$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}25^n=0$ car $0<0{,}25<1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}-5\times0{,}25^n=-5\times0=0$, soit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0}$.

Comme, pour tout $n\ \in\mathbb{N},\ u_n=v_n+8$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0+8=8}$.

Ce résultat coïncide bien avec la conjecture de la partie A.

3) Étudions, pour tout entier n, le signe de $u_{n+1}-u_n$.

Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n&=(-5\times0{,}25^{n+1}+8)-(-5\times0{,}25^n+8)\\
u_{n+1}-u_n&=-5\times0{,}25^{n+1}+8+5\times0{,}25^n-8\\
u_{n+1}-u_n&=-5\times0{,}25^{n+1}+5\times0{,}25^n\\
u_{n+1}-u_n&=5\times0{,}25^n-5\times0{,}25^{n+1}\\
u_{n+1}-u_n&=5\times0{,}25^n\times1-5\times0{,}25^n\times0{,}25 \quad \text{car } 0{,}25^{n+1}=0{,}25^n\times0{,}25^1\\
u_{n+1}-u_n&=5\times0{,}25^n(1-0{,}25)\\
u_{n+1}-u_n&=5\times0{,}25\times0{,}75\ .
\end{aligned}$$

La différence $u_{n+1}-u_n$ est le produit de trois nombres positifs. D'après la règle des signes, $u_{n+1}-u_n>0$ pour tout entier n , donc $\forall\ n\ \in\mathbb{N},\ u_{n+1}>u_n$. La suite (u_n) est donc bien strictement croissante, ce que nous avions conjecturé dans la partie A.