Calcul littéral : ce qu 'il faut savoir

1) Vocabulaire :

Somme = résultat d'une addition.
Différence = résultat d'une soustraction.
Produit = résultat d'une multiplication.
Quotient = résultat d'une division.

Développer : c'est transformer un produit en une somme qui lui est égale.
Factoriser : c'est transformer une somme en un produit qui lui est égal.

Une différence peut être considérée comme une somme, puisque ***soustraire un nombre, c'est additionner son opposé***. Exemple : Faire -16, c'est faire $+(-16)$.

2) La multiplication implicite : ***Le signe opératoire qu'on n'écrit pas*** (dans certains cas) ***est la multiplication***.

Exemples : $4x^2$, c'est $4\times x^2$. $7(x+1)$, c'est $7\times(x+1)$. $(2x-3)(7-2x)$, c'est $(2x-3)\times(7-2x)$.
Bien sûr, on ne peut pas faire disparaître le signe $\times$ entre deux nombres écrits en chiffres : $7\times 2 \neq 72$.

Dans un produit où la multiplication est implicite, on écrit :

- d'abord le nombre en chiffres,
- puis les lettres par ordre alphabétique,
- puis les parenthèses.

Exemple : $(x+1)\times 7\times y\times a\times(-3)\times(2x+5)$ s'écrira : $-21ay(x+1)(2x+5)$.

3) Réduire :

Pour réduire une somme, on « compte ensemble » les termes « de même nature ».

Par exemple, les termes en x^2, les termes en x, les termes en y, les termes en *ab*, et les termes uniquement écrits en chiffres.

Exemple : réduisons la somme

$$A(x)=13x^2-7x+9+3y-18x-x^2-16+12y$$

$$A(x)=12x^2-25x+15y-7$$

Remarque : « compter ensemble », en fait, c'est factoriser : $4x-3x-2x=(4-3-2)x=-1x=-x$.
Rappel : $x=1x$, $-x=-1x$. (C'est pourquoi $13x^2-x^2=13x^2-1x^2=12x^2$)

⚠ On le peut pas « compter ensemble » les x et les x^2 par exemple, car x et x^2 ne sont pas le même nombre (sauf cas particuliers).

4) Ôter une parenthèse précédée d'un + ou d'un – :

Dans une suite d'additions et de soustractions :

- ***On peut ôter une parenthèse précédée d'un + ainsi que ce + sans changer les signes des termes dans la parenthèse.***
- ***On peut ôter une parenthèse précédée d'un – ainsi que ce – en changeant tous les signes des termes dans la parenthèse.***

Exemples : $5x^2-13x+7+(-15x^2+17x-1)=5x^2-13x+7-15x^2+17x-1$

On ôte la parenthèse et le signe + qui la précède — On garde les signes des termes qui étaient dans la parenthèse.

$5x^2-13x+7-(-15x^2+17x-1)=5x^2+13x+7+15x^2-17x+1$

On ôte la parenthèse et le signe – qui la précède — On change les signes des termes qui étaient dans la parenthèse.

5) Formules pour développer et factoriser :

Sens développement

Distributivité simple :

$$k(a+b)=ka+kb$$
$$k(a-b)=ka-kb$$

Sens factorisation

Sens développement

Identités remarquables :

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Sens factorisation

Distributivité double :

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

(On ne s'en sert que pour développer)

⚠ Ne pas confondre : $(a-b)^2 \neq a^2-b^2$

La puissance ne se distribue PAS sur l'addition et la soustraction.

En revanche, ***la puissance se distribue sur la multiplication et la division :***

$$(a\times b)^2=a^2\times b^2 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}$$

Exemples : développons $(4x-7)^2$ et $\left(\frac{x}{2}+3\right)^2$, factorisons $9x^2-25$.

$$(4x-7)^2=(4x)^2-2\times 4x\times 7+7^2=16x^2-56x+49$$
$$(a-b)^2=a^2-2\,a\,b+b^2$$
$$\left(\frac{x}{2}+3\right)^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+2\times\frac{x}{\cancel{2}}\times 3+3^2=\frac{x^2}{4}+3x+9$$
$$(a+b)^2=a^2+2\,a\,b+b^2$$

Sens développement

$$9x^2-25=(3x)^2-5^2=(3x+5)(3x-5)$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Sens factorisation.

6) Reconnaître des facteurs égaux et opposés.

a) Facteurs égaux.

Rappel : *dans une somme, on peut placer les termes dans l'ordre qu'on veut* (mais il ne faut pas oublier que leurs signes les accompagnent). C'est pourquoi : $1+3x$ et $3x+1$ sont égaux. $7-x$ Et $-x+7$ sont égaux aussi.

Factorisons : $(7-x)(x-5)-x+7$:

Ça ne change pas un nombre de le multiplier par 1

$$(7-x)(x-5)-x+7 = (\underbrace{-x+7}_{k})(\underbrace{x-5}_{a}) + (\underbrace{-x+7}_{k})\times\underbrace{1}_{b}$$
$$= (\underbrace{-x+7}_{k})(\underbrace{x-5}_{a}+\underbrace{1}_{b})$$
$$= (-x+7)(x-4)$$

b) Facteurs opposés :

Rappel : deux *nombres* sont *opposés* quand *leur somme vaut 0*. Exemple : 4 et -4 sont opposés.
Deux nombres opposés ont le même carré : Exemple : $(4)^2=(-4)^2=16$.

Exemples d'expressions littérales opposées : $3-2x$ et $2x-3$, car leur somme vaut 0, ou car $-(3-2x)=-3+2x=2x-3$, ou x+4 et $-x-4$, ou $-5x+12$ et $5x-12$ etc...

Factorisons : $(5-3x)(7+x)-(3x-5)^2-3x+5$

Méthode 1 : en choisissant $5-3x$ comme facteur commun :

car deux nombres opposés ont le même carré

$$(5-3x)(7+x)-(3x-5)^2-3x+5 = (\underbrace{5-3x}_{k})(\underbrace{7+x}_{a}) - (\underbrace{5-3x}_{k\,b})^2 + (\underbrace{5-3x}_{k})\times\underbrace{1}_{c}$$
$$= (\underbrace{5-3x}_{k})(\underbrace{7+x}_{a} - (\underbrace{5-3x}_{b}) + \underbrace{1}_{c})$$

⚠ écrire dans une parenthèse car il y a un − devant.

$$= (5-3x)(7+x-5+3x+1)$$
$$= (5-3x)(4x+3)$$

Méthode 2 : En choisissant $3x-5$ comme facteur commun :

$$(5-3x)(7+x)-(3x-5)^2-3x+5 = -(3x-5)(7+x)-(3x-5)^2-(3x-5)$$
$$= \underbrace{-1}_{a}(\underbrace{3x-5}_{k})(\underbrace{7+x}_{a}) - (\underbrace{3x-5}_{k\,b})^2 - (\underbrace{3x-5}_{k})\times\underbrace{1}_{c}$$
$$= (\underbrace{3x-5}_{k})(\underbrace{-1(7+x)}_{a} - (\underbrace{3x-5}_{b}) - \underbrace{1}_{c})$$
$$= (3x-5)(-7-x-3x+5-1)$$
$$= (3x-5)(-4x-3)$$

qu'on peut aussi écrire : $-(3x-5)(4x+3)$