# CLASSE DE 2NDE – CHAPITRE : VECTEURS (Programme 2010)

## Introduction :

Figure 1 :

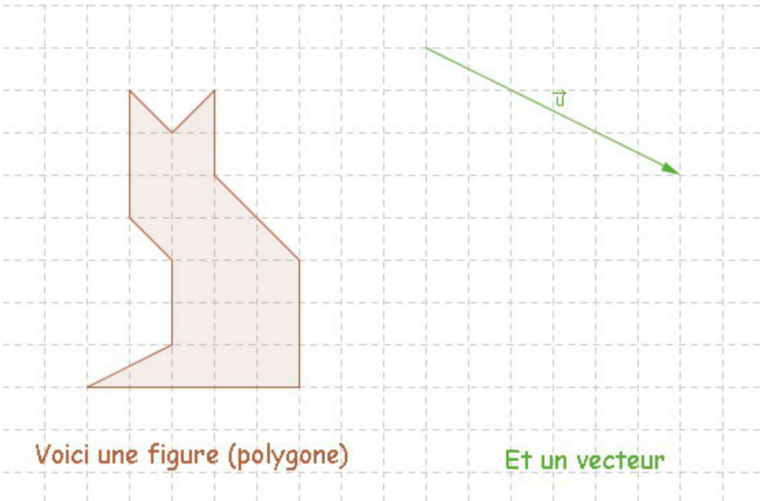
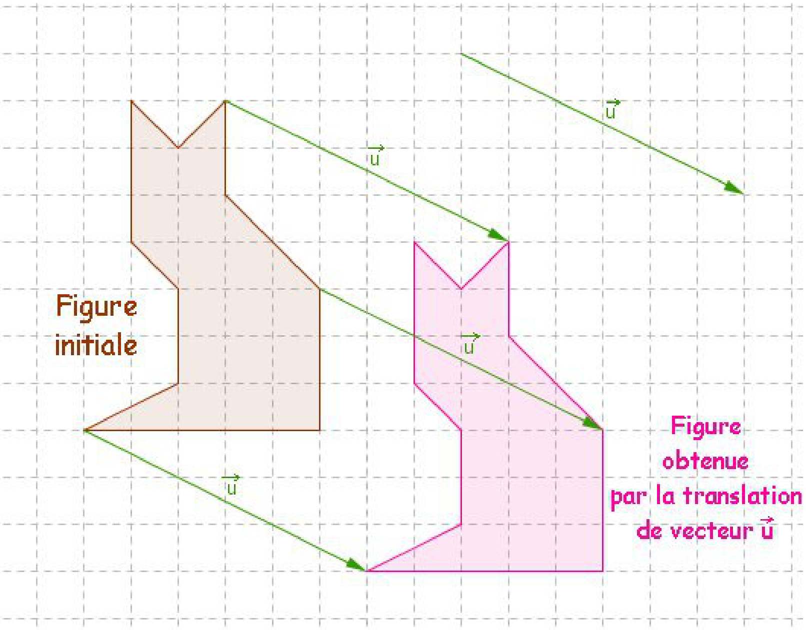



Figure 1 bis :




On a effectué une **translation** de vecteur $\vec{u}$, c'est-à-dire un déplacement de la figure, sans la tourner ni la déformer, ni l'agrandir ni la rapetisser, selon la *direction*, le *sens* et la *longueur* (ou *norme*) du vecteur $\vec{u}$. Si on relie un point quelconque de la figure initiale au point qui lui correspond dans la figure translatée, on obtient le vecteur $\vec{u}$ .

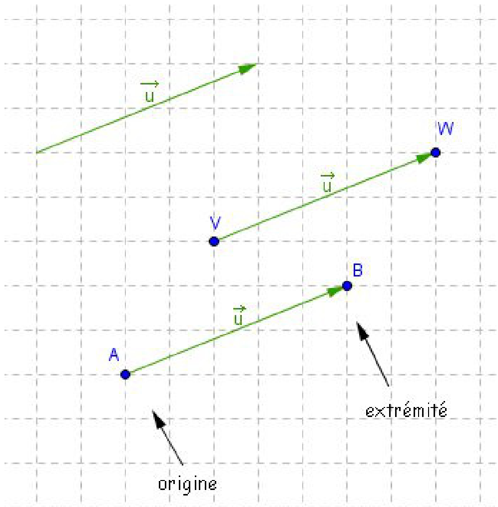
$\vec{u}$ n'a pas de place fixe, il est « mobile » dans la figure.

Mais on peut le nommer aussi à l'aide de points fixes d'une figure, si ces points peuvent être **l'origine** et **l'extrémité** d'un des **représentants** du vecteur $\vec{u}$ .

Dans l'exemple de la figure 2 : $\vec{u}=\overrightarrow{VW}=\overrightarrow{AB}$

Figure 2 :

Exercices : 37 à 41 p 329 Math'x 2nde 2010

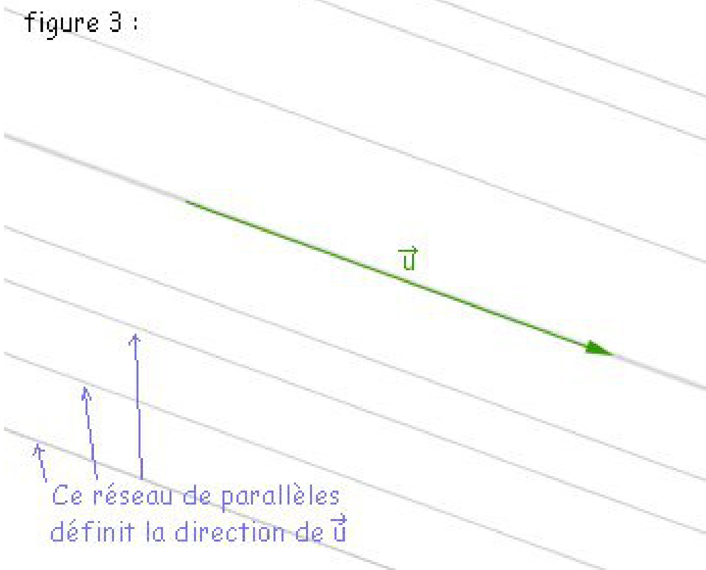


I- Caractéristiques d'un vecteur.

1) Vecteurs égaux.

Un vecteur est caractérisé par :
- Sa **direction**
- Son **sens**
- Sa **longueur**, dite sa « **norme** ».

Notion de direction :




Sur la *figure 3 bis*, les vecteurs $\vec{u}$ , $\vec{v}$ , $\vec{w}$ et $\vec{z}$ ont la même direction, mais $\vec{j}$ n'a pas la même direction qu'eux.

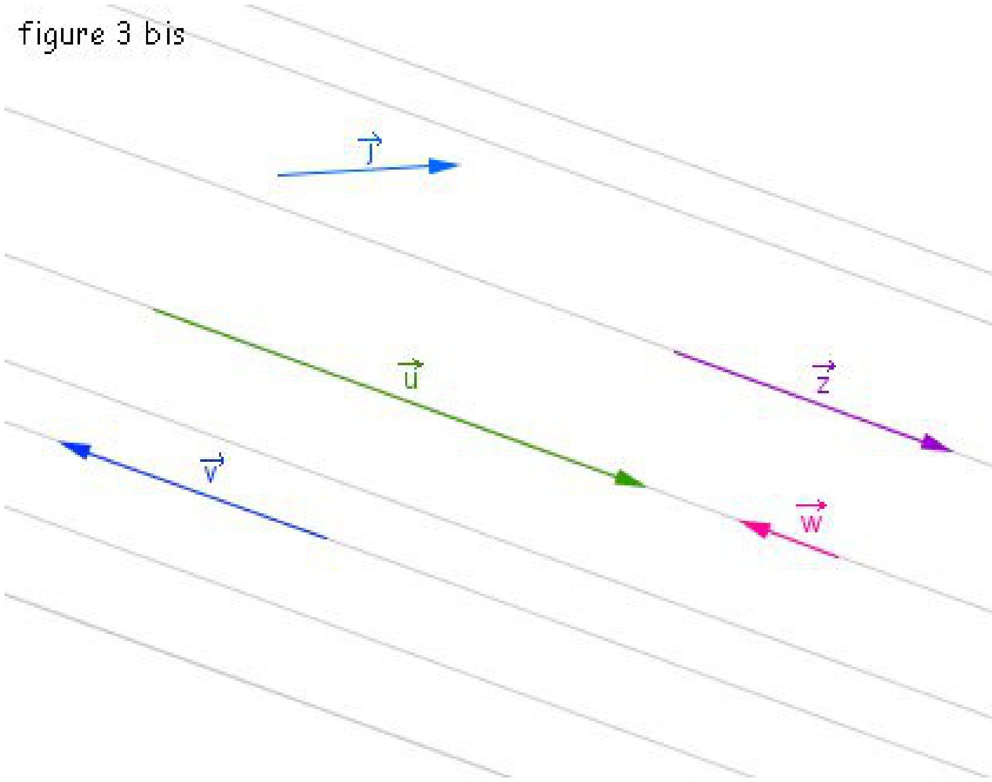
→ Des vecteurs ont même direction lorsque leurs supports sont parallèles.

Notion de sens :

C'est la flèche qui détermine le sens d'un vecteur.

Lorsque deux vecteurs ont la même direction, ils peuvent être de même sens ou bien de sens contraires.

Sur la figure :
$\vec{u}$ et $\vec{z}$ ont le même sens,
$\vec{v}$ et $\vec{w}$ ont le même sens,
mais $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires.

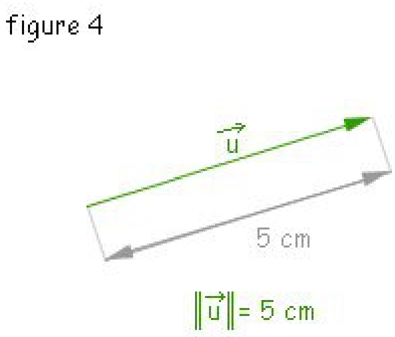



→ Pour que deux vecteurs aient le même sens, ils doivent d'abord avoir la même direction, et en plus, les flèches doivent être « du même côté ».

Notion de norme :

La norme d'un vecteur, c'est sa longueur.

Si le vecteur $\vec{u}$ mesure 5 cm, on notera $\|\vec{u}\|$=5 cm




Retenir : Deux **vecteurs** sont **égaux** lorsqu'ils ont à la fois **même direction**, **même sens** et **même norme**.

Exercices : 22, 23 et 27 page 330, manuel Math'x 2$^{nde}$ 2010.

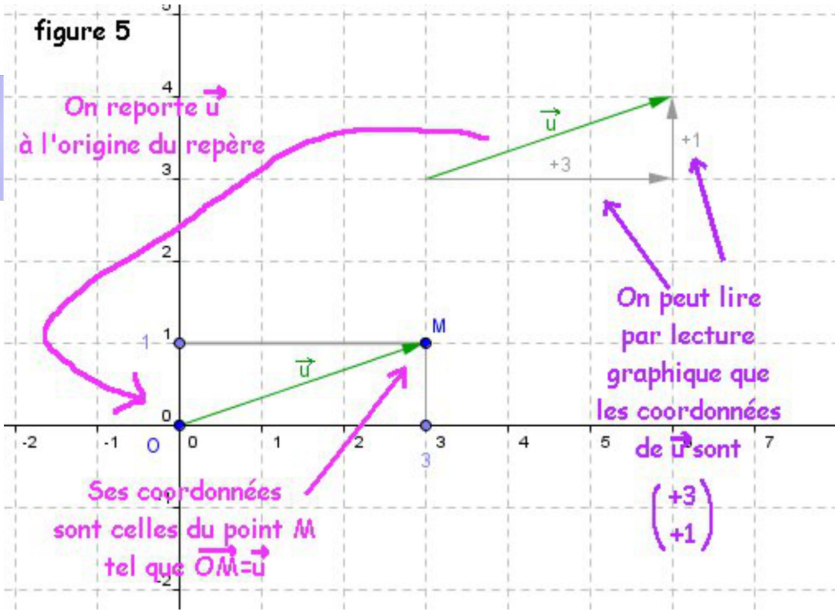
## 2) Coordonnées d'un vecteur dans un repère.

**Définition** : Les **coordonnées d'un vecteur** $\vec{u}$ dans un repère d'origine O sont celles du point M placé tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Dans l'exemple figure 5 : $\vec{u}\ (3\,;1)$

Pour plus de facilité, je vais noter les coordonnées l'une en-dessous de l'autre dans cette leçon (comme on le fait le plus souvent lorsqu'on avance dans l'étude des maths) :

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ ← abscisse de $\vec{u}$ (déplacement horizontal) ← ordonnée de $\vec{u}$ (déplacement vertical)




**Propriété 1** (admise) : Dans un repère, deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

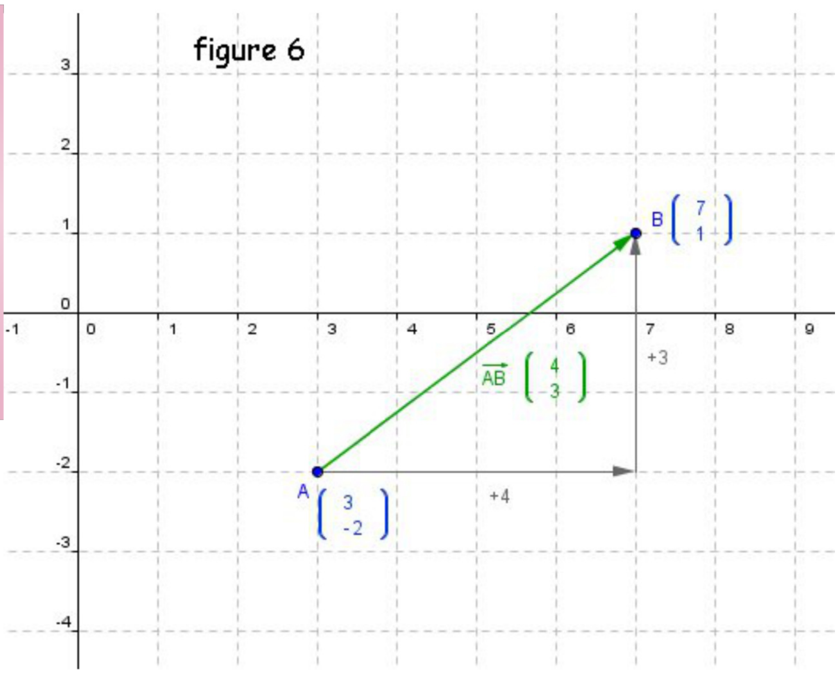
**Autre formulation** : Dans un repère, pour que deux vecteurs soient égaux, il faut et il suffit qu'ils aient les mêmes coordonnées.

**Formule de calcul des coordonnées d'un vecteur défini par deux points** :

Soient A $\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ deux points dans un repère.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$$

« arrivée » – « départ »




Pour calculer les coordonnées d'un vecteur, on fait : « coordonnées de l'arrivée » moins « coordonnées du départ », ce qui nous donne les « coordonnées du déplacement ».

Dans l'exemple de la figure 6, on a A $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont donc : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7-3\\1-(-2)\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}+4\\+3\end{pmatrix}$ ← déplacement horizontal ← déplacement vertical

Exercices dans le manuel Math'x 2nde 2010 : n°28 et 29 p 330, n°33 p 331, 82 et 84 p 336.

## 3) Ce qu'une égalité vectorielle permet de démontrer.

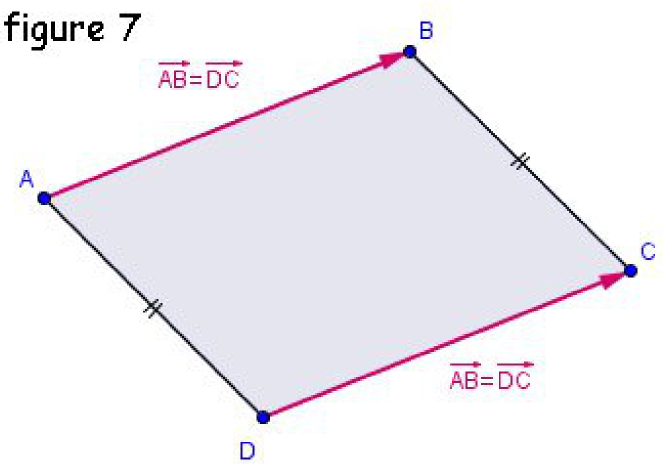
### a) Qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

Théorème 1 :

Soient A, B, C et D, 4 points distincts du plan.
ABCD est un parallélogramme (éventuellement aplati) si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

⚠ L'ordre des points est : AB**CD** dans le parallélogramme, mais les vecteurs égaux sont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ .

*Pour plus de détails et d'explications, voir le manuel Math'x 2^nde^ éditions 2010 page 316 ou le manuel Hyperbole 2^nde^ Éditions 2010 page 196.*




Remarque : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ n'est pas la seule égalité vectorielle qui soit équivalente au fait que ABCD soit un parallélogramme. En voilà trois autres : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ $\quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ $\quad \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

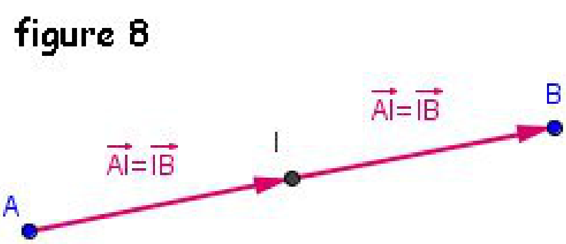
Exercices dans le manuel Math'x 2^nde^ édition 2010 : n°24 page 330, n°30, 31, 32, 34, 35 et 36 p 331, n°80 p 335, 81 p 336, n°123 p 340.

### b) Qu'un point est le milieu d'un segment.

Théorème 2 : Soient A, B et I trois points du plan, avec A≠B. I est le milieu du segment [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

⚠ Il faut que ce soit le même point

Une autre égalité vectorielle est équivalente au fait que I soit le milieu de [AB] : $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IA}$ .




Exercices dans le manuel Math'x 2^nde^ édition 2010 : n°21 et 25 page 330, n°35 et 36 p 331, n°52 p 333.

## 4) Calcul de la norme d'un vecteur ou d'une distance dans un repère orthonormé.

⚠ Les formules de ce paragraphe ne sont valables qu'en **repère orthonormé** (= dont les deux axes sont perpendiculaires et qui ont la même unité sur chaque axe. On dit aussi « **repère orthonormal** », à ne pas confondre avec le **repère orthogonal**, qui a bien ses deux axes perpendiculaires, mais pas nécessairement la même unité sur chaque axe).

En effet, pour pouvoir calculer des distances et des longueurs, il faut :

- **La même unité sur les deux axes** (cette unité sera aussi l'unité de longueur dans laquelle nous obtiendrons les résultats) → « norm » dans ortho**norm**al ou ortho**norm**é.
- **Un angle droit entre les deux axes**, car ces formules résultent du théorème de Pythagore, qui ne s'applique que dans les triangles rectangles. → « ortho » dans **ortho**normal ou **ortho**normé.

<u>Formule de calcul de la norme d'un vecteur dont on connaît les coordonnées en repère orthonormé</u> :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé, alors

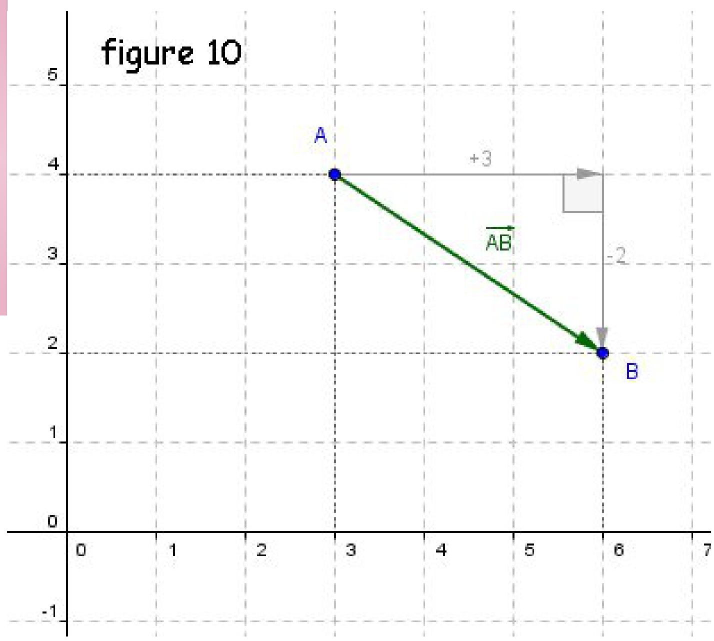
$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x_{\vec{u}}^{\,2}+y_{\vec{u}}^{\,2}}$$

Dans l'exemple de la figure 9, les coordonnées de $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} +3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Comme $(-2)$ et 2 ont le même carré, la norme de $\vec{u}$ dans le triangle rectangle dessiné s'obtient en calculant : $\sqrt{3^2+2^2}$ ou $\sqrt{3^2+(-2)^2}$.[1]


<u>Formule de calcul d'une distance AB, ou encore de la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, dans un repère orthonormé</u> :

Si on a $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_a \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ en repère orthonormé, alors la distance AB ou la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'obtient par la formule : $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Cette formule résulte immédiatement des deux précédentes, puisque $x_B-x_A$ et $y_B-y_A$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.




Dans l'exemple de la *figure 10*, on a : $A\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

AB ou $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(6-3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

Dans le manuel Math'x 2$^{nde}$ édition 2010 : n°32 p 331.

## II- <u>Somme de vecteurs</u>.

### 1) <u>Construire la somme de deux vecteurs ou plus</u>.

<u>Méthode</u> : pour construire la somme de plusieurs vecteurs, on les place à la queue leu-leu, l'origine du suivant partant à l'extrémité du précédent. Le **<u>vecteur somme</u>** est alors le vecteur ayant pour origine celle du premier des vecteurs et pour extrémité celle du dernier des vecteurs.

L'ordre dans lequel on place les vecteurs bout à bout n'a pas d'importance, on obtient le même vecteur somme.

D'où la <u>propriété 2</u> : L'addition vectorielle est <u>commutative</u> : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

Cette propriété est valable aussi pour plus de deux vecteurs : on peut les additionner dans l'ordre qu'on veut, on obtient le même vecteur somme.

---

1 Dans le triangle rectangle de la figure, l'hypoténuse est $\|\vec{u}\|$, les côtés de l'angle droit mesurent 3 et 2. D'après le théorème de Pythagore, $\|\vec{u}\|^2=3^2+2^2$, donc $\|\vec{u}\|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$ .

figure 11

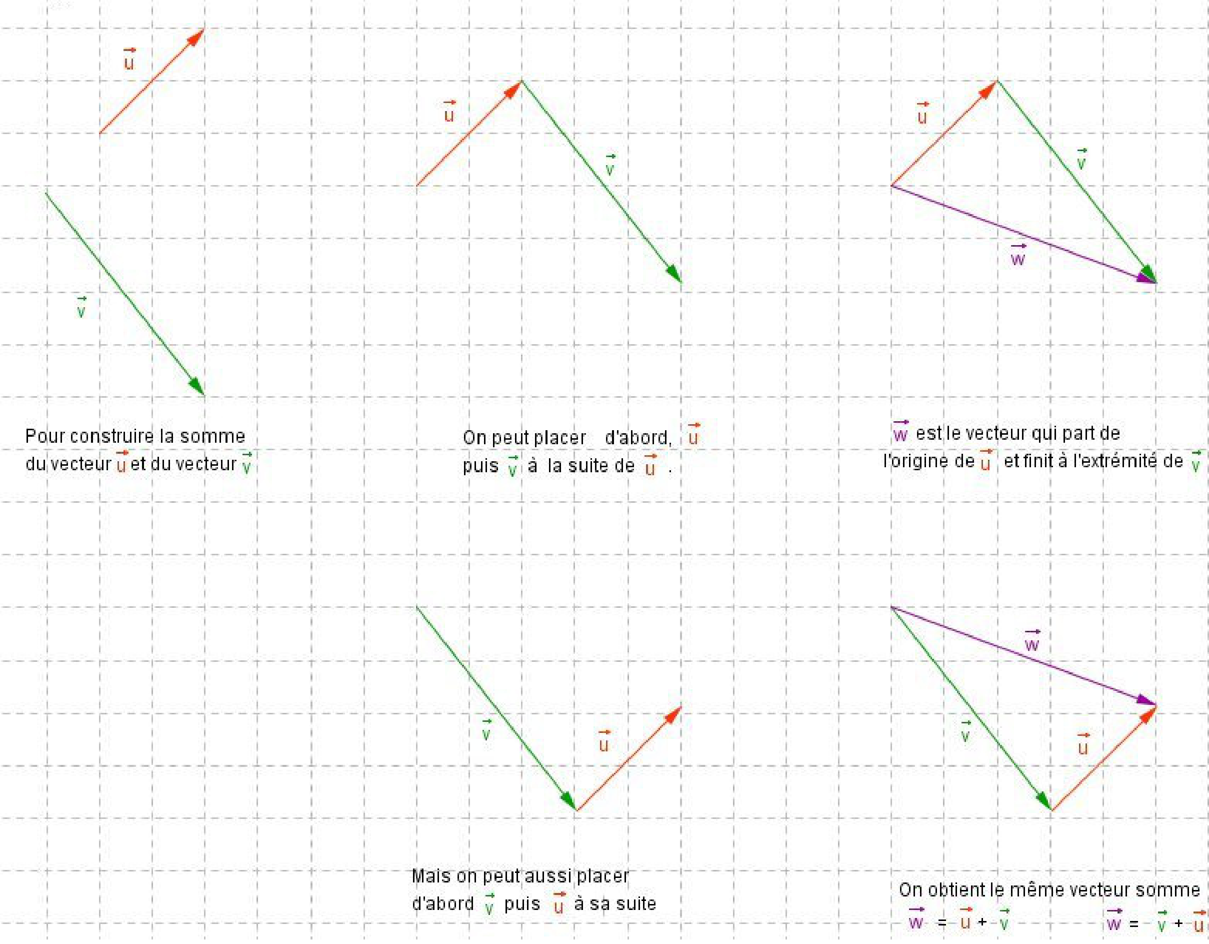



figure 12

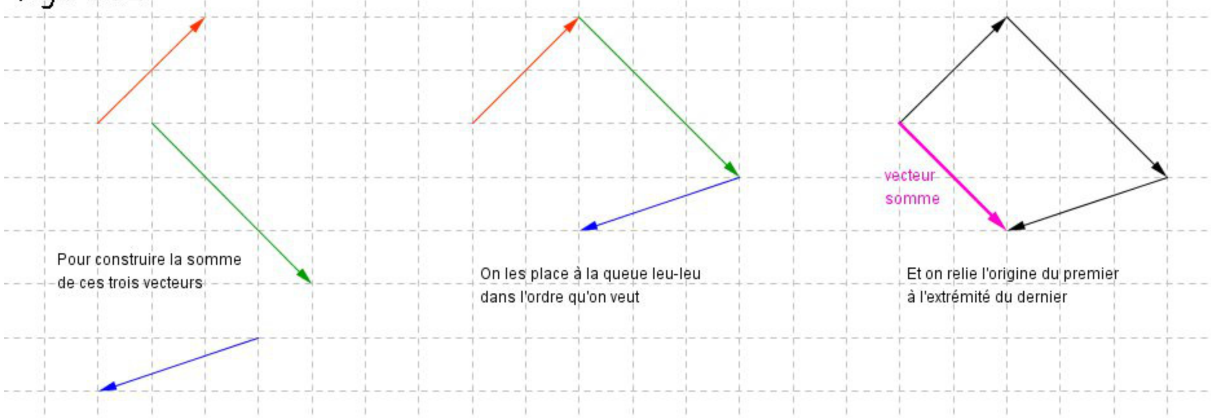
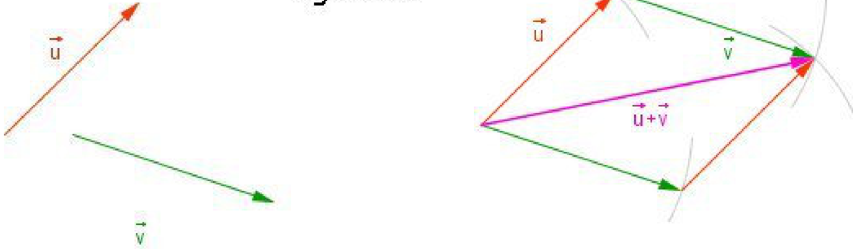


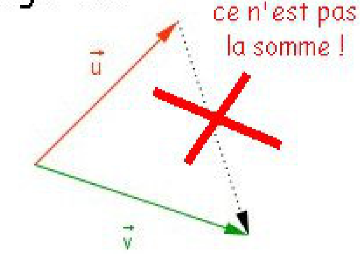

figure 13




Pour construire la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sans quadrillage,

On construit un parallélogramme à la règle et au compas, sachant que les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur.

figure 14

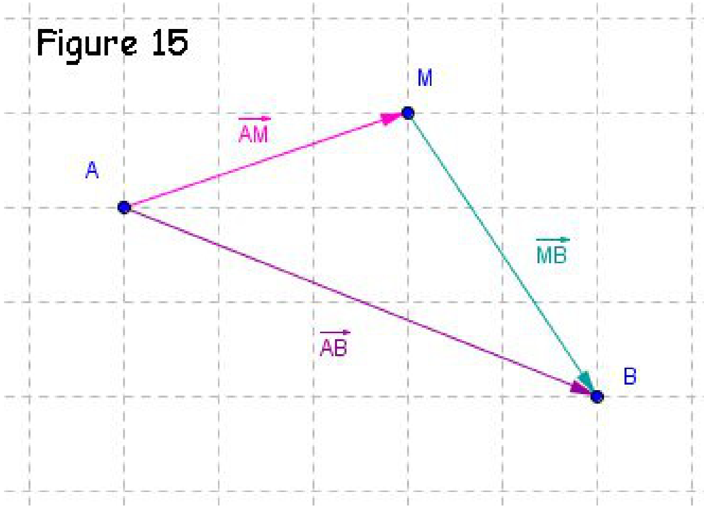



⚠ Erreur fréquente : Les vecteurs doivent être à la queue leu-leu, pas avoir la même origine !

Dans le manuel Math'x 2nde édition 2010 : Exercice 38 page 331, 83 et 89 p 336, voir aussi ma fiche « Activité : s'entraîner à construire la somme de deux vecteurs » sur http://www.letableaunoir.net page des secondes, rubrique « les activités » ou « Exercices regroupés par thèmes : vecteurs ».

2) La relation de Chasles.

De la notion de somme de deux vecteurs résulte la relation de Chasles :




Théorème 3 : Pour tous poins A, B et M du plan,

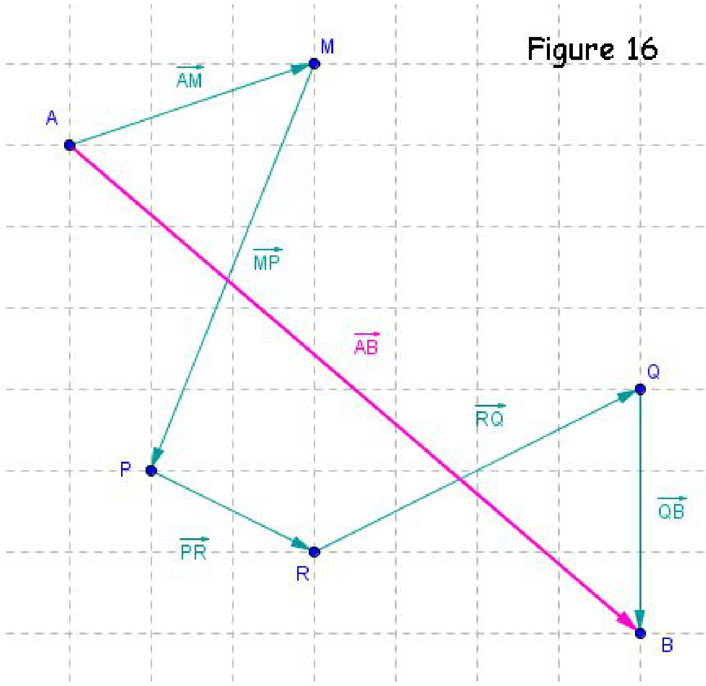
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$$

C'est le même point

Penser en termes de déplacements : pour me rendre d'une ville A à une ville B, je peux passer par la ville M.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$$

départ arrivée départ étape arrivée

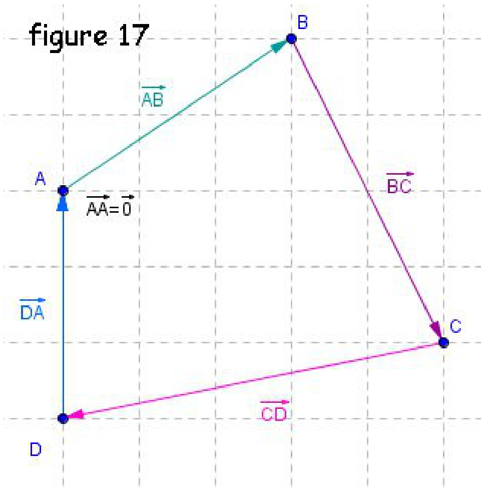



On peut multiplier les étapes :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QB}$$

L'important est de bien partir du « départ »,
de bien arriver à « l'arrivée »,
et, quand on est arrivé à une « étape », de bien repartir de la même « étape ».

Et que se passe-t-il si l'on revient à son point de départ ?




Par exemple : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA}$

$\overrightarrow{AA}$ est un vecteur dont **la norme est zéro**, et **qui n'a ni direction ni sens**.

On l'appelle le **vecteur nul**, on le note $\vec{0}$ .

Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$ .

Appliquons la relation de Chasles :

Décomposons $\overrightarrow{MN}$ en une somme vectorielle : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{...P} + \overrightarrow{...R} + \overrightarrow{...K} + \overrightarrow{...N}$

Réduisons la somme vectorielle suivante : (n'oublions pas qu'on peut additionner les vecteurs dans l'ordre qu'on veut d'après la propriété 2)

$\boxed{\overrightarrow{AT}} + \boxed{\overrightarrow{KU}} + \boxed{\overrightarrow{TK}} + \boxed{\overrightarrow{LP}} + \boxed{\overrightarrow{UL}} = \boxed{\overrightarrow{AT}} + \boxed{\overrightarrow{TK}} + \boxed{\overrightarrow{KU}} + \boxed{\overrightarrow{UL}} + \boxed{\overrightarrow{LP}} = \overrightarrow{AP}$

Dans le manuel Math'x 2nde éditions 2010 : n°37 et 39 p 331, n°44 p 332, n°53 et 54 p 333.

3) Coordonnées d'une somme de vecteurs.

Formule : coordonnées d'une somme vectorielle.

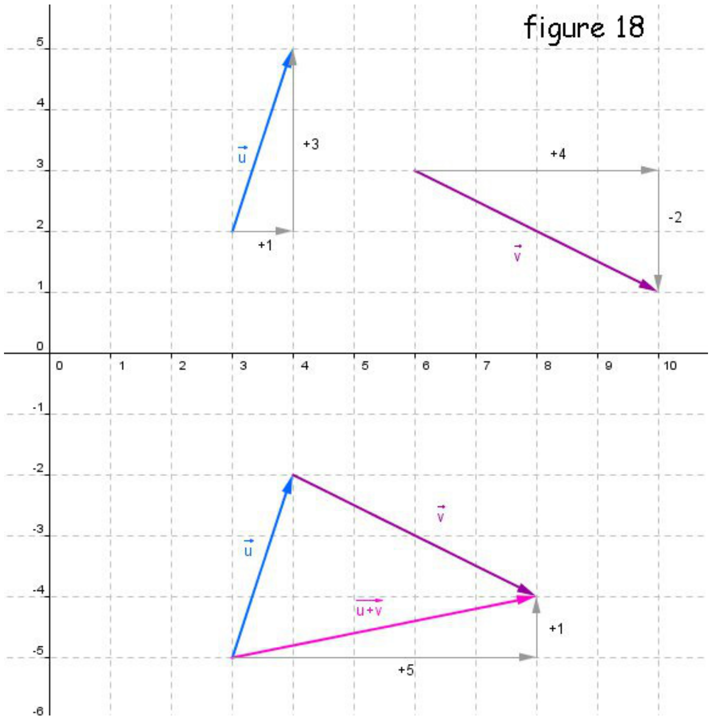
Dans un repère (quelconque, il n'a pas besoin d'être orthonormal ni même orthogonal), les coordonnées de la somme de deux vecteurs (ou plus) s'obtiennent en faisant la somme des coordonnées de chaque vecteur.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}}+x_v \\ y_{\vec{u}}+y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$

Exemple : si $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$,

alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} 1+4 \\ 3+(-2) \end{pmatrix}$, soit $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 3-2 \end{pmatrix}$,

soit $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$




Dans le manuel Math'x 2nde éditions 2010 : n°40 et 41 p 331, n°37 et 39 p 331, n°42, 43, 45, 46, 47 p 332.

## III- Multiplication d'un vecteur par un réel, vecteurs colinéaires.

1) Quelques constructions.

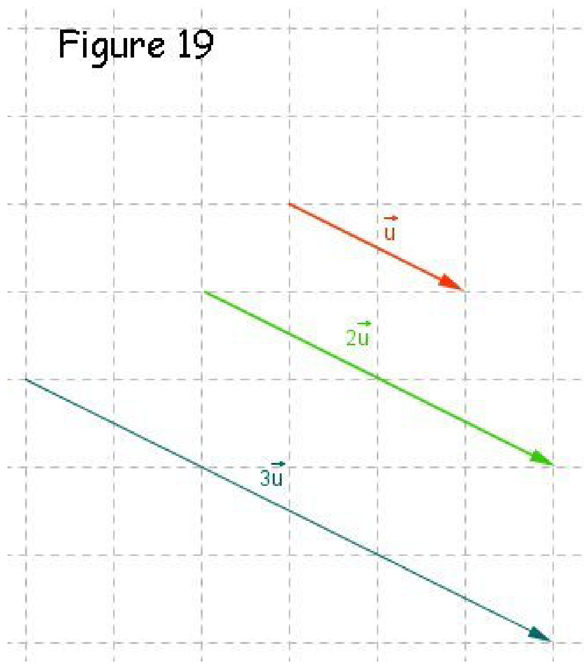
On donne un vecteur $\boxed{\vec{u}}$.

Construisons le vecteur $\boxed{2\vec{u}}$ (égal à $\vec{u}+\vec{u}$)

Remarque : il a même *sens* et même *direction* que $\vec{u}$, et sa *norme* est égale à $2\times\|\vec{u}\|$.

Le vecteur $\boxed{3\vec{u}}$ (égal à $\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}$)

Remarque : il a même *sens* et même *direction* que $\vec{u}$, et sa *norme* est égale à $3\times\|\vec{u}\|$.



Dans cette logique, construisons le vecteur $\boxed{\frac{1}{2}\vec{u}}$.

Il a même *sens* et même *direction* que $\vec{u}$, et sa *norme* est égale à $\frac{1}{2} \times || \vec{u} ||$.

Construisons le vecteur $\boxed{-\vec{u}}$, le **vecteur opposé** de $\vec{u}$, c'est-à-dire celui qui, additionné à $\vec{u}$, donne le vecteur nul.

Remarque : il a même *direction* et même *norme* que $\vec{u}$, mais il est se *sens* contraire.

Construisons le vecteur $\boxed{-2\vec{u}}$.
Il a même *direction* que $\vec{u}$, il est de *sens* contraire, et sa *norme* vaut $2 \times || \vec{u} ||$.

Construisons le vecteur $\boxed{-\frac{5}{2}\vec{u}}$.

Il a même *direction* que $\vec{u}$, il est de *sens* contraire, et sa *norme* vaut $\frac{5}{2} \times || \vec{u} ||$.

Quant à $0 \times \vec{u}$, il s'agit bien entendu du vecteur nul : $\vec{0}$.

Dans le manuel Math'x 2nde 2010 : n°60 et 61 p 333 + Feuille d'aide individualisée du 12 janvier 2009 : placer les points définis par des égalités vectorielles, n°87 p 336, n°105 et 109 p 338.

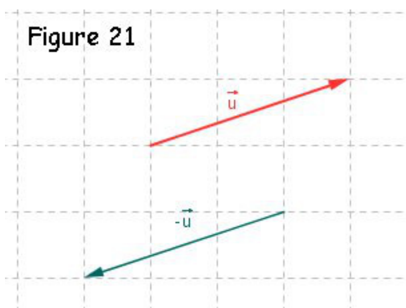

Définition : Produit d'un vecteur par un réel.
Soit k un réel et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
Le vecteur $k \times \vec{u}$ ou $k\vec{u}$ est défini de la manière suivante :

- Si **k>0**, c'est le vecteur qui a même direction et même sens que $\vec{u}$, et dont la norme est égale à $k \times || \vec{u} ||$.
- Si **k<0**, c'est le vecteur qui a même direction que $\vec{u}$, qui est de sens contraire, et dont la norme est égale à $|k| \times || \vec{u} ||$, où $|k|$ est la valeur absolue de k [2].
- Si **k=0**, c'est le vecteur nul.

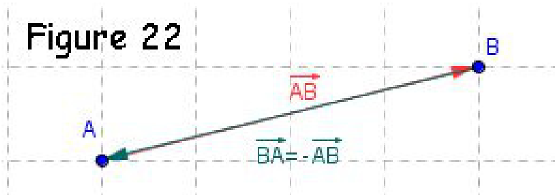
## 2) Opposé d'un vecteur.

Définition : L'opposé d'un vecteur non-nul $\vec{u}$ est le vecteur $-\vec{u}$ (ou $-1\vec{u}$) qui :

- a même direction que $\vec{u}$.
- est de sens contraire.
- a même norme que $\vec{u}$.




Conséquence : Propriété 3 :
Pour tous points A et B du plan,
les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés.
Soit $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$




2 La valeur absolue de 8 est 8 et celle de -5 est 5 : si vous voulez, c'est le « nombre sans le signe »,

Application : A, B, C, F, E étant 5 points quelconques, réduisons l'expression : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CF}$ :

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \boxed{\overrightarrow{FE}} + \boxed{\overrightarrow{BC}} + \boxed{\overrightarrow{CF}}$ en transformant les différences en sommes des opposés.

$= \overrightarrow{AB} + \boxed{\overrightarrow{BC}} + \boxed{\overrightarrow{CF}} + \boxed{\overrightarrow{FE}}$ en changeant l'ordre des termes de la somme.

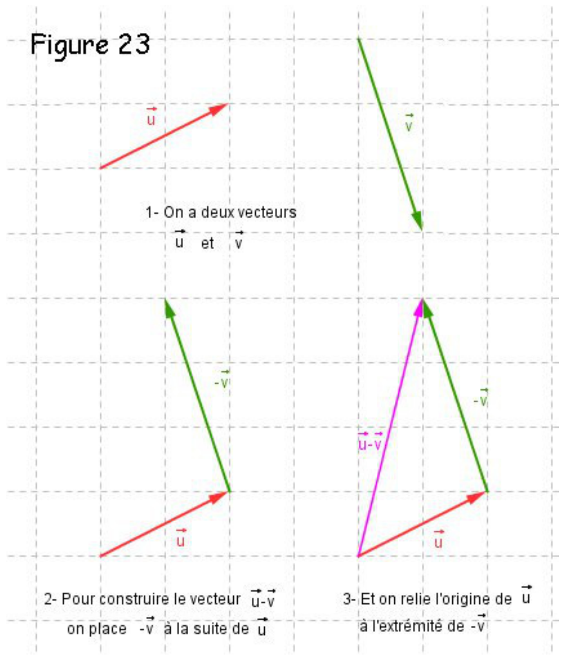
$= \overrightarrow{AE}$ en réduisant à l'aide de la relation de Chasles. N°92 p 336, n°110 p338, 116 p 339,

Méthode :

Pour **construire la différence de deux vecteurs**, $\vec{u}-\vec{v}$ , on construit $\vec{u}$ et on lui additionne l'opposé de $\vec{v}$ .

$$\vec{u}-\vec{v} = \vec{u} + ( -\vec{v} )$$

Dans le manuel Math'x 2nde édition 2010 : n°49 p 332, 50, 55, 56, 57 p 333, 90, 91 et 92 p 336.




3) Coordonnées de produit d'un vecteur par un réel.

Formule : Pour tout réel k et pour tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ dans un repère, les coordonnées du vecteur k $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} k \times x_{\vec{u}} \\ k \times y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

En « français » : pour calculer les coordonnées du vecteur k $\vec{u}$ , on multiplie les coordonnées de $\vec{u}$ par k.

Exemple : Dans un repère, les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

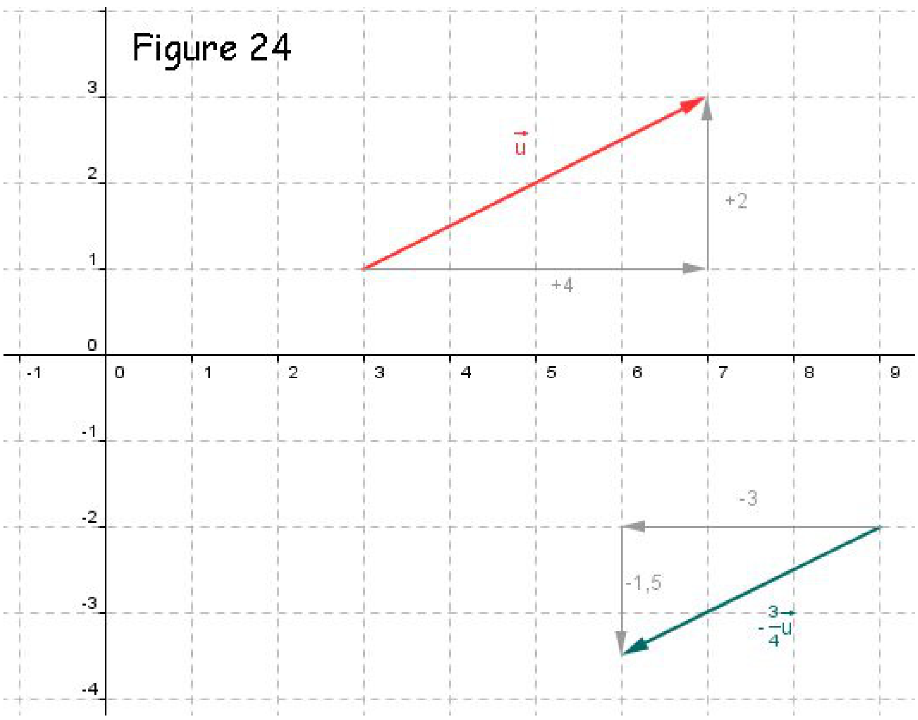
Les coordonnées du vecteur $-\frac{3}{4}\vec{u}$ seront :

abscisse : $-\frac{3}{4} \times 4 = \frac{-3 \times 4}{4} = -3$

ordonnée : $-\frac{3}{4} \times 2 = \frac{-3 \times 2}{2 \times 2} = -\frac{3}{2}$ .

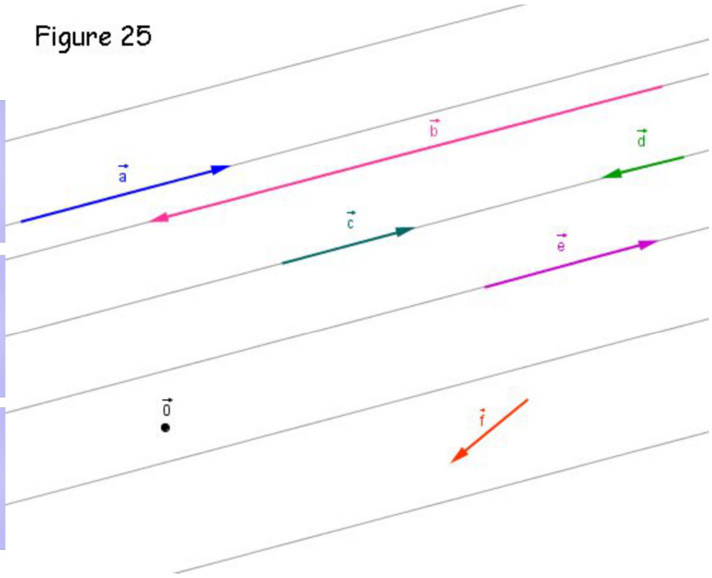
$$-\frac{3}{4}\vec{u} \begin{pmatrix} -3 & ; & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Remarque : $-\frac{3}{2} = -1{,}5$




Dans le manuel Math'x 2nde Édition 2010 : n°59 et 62 p 333, n°66 p334, n°85 et 86 p 336, 100 p 337.

## 4) Vecteurs colinéaires.




Définition : on dit que deux **vecteurs** sont **colinéaires** lorsque l'un peut être exprimé comme le produit de l'autre par un réel.

Autre formulation : Deux **vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$ ou $\vec{v}=k\vec{u}$ .

Concrètement : Deux **vecteurs** sont **colinéaires** lorsqu'ils ont même direction, ou lorsque l'un des deux au moins est le vecteur nul.

Figure 25 : les droites grises sont parallèles. Les vecteurs $\vec{a}$ , $\vec{b}$ , $\vec{c}$ , $\vec{d}$ , $\vec{e}$ et $\vec{0}$ sont colinéaires. $\vec{f}$ n'est pas colinéaires à $\vec{a}$ , $\vec{b}$ , $\vec{c}$ , $\vec{d}$ et $\vec{e}$ , mais il l'est à $\vec{0}$ .

Remarque : le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel vecteur du plan.

Dans le manuel Math'x 2$^{nde}$ édition 2010 n°63 page 334.

Propriété 4 : dans un repère (quelconque), deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Remarque : quand il n'y a ni perpendicularité ni calcul de longueur, le repère n'a pas besoin d'être orthonormal.
Exemple : pour calculer les coordonnées d'un milieu ou s'occuper de questions de parallélisme, d'alignement ou de colinéarité, un repère quelconque suffit.

Méthode : pour savoir si les coordonnées de deux vecteurs sont proportionnelles ou non, sauf dans les cas simples, on calcule le déterminant formé par les coordonnées de ces deux vecteurs.

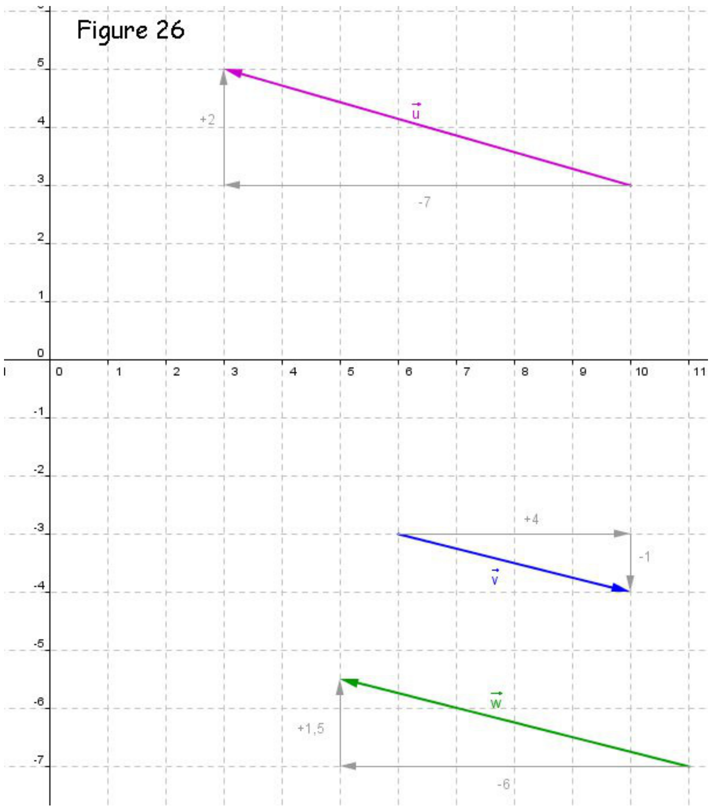
Si le déterminant est nul (c'est-à-dire égal à zéro), les coordonnées sont proportionnelles, donc les vecteurs sont colinéaires.

Si le déterminant est différent de zéro, les coordonnées ne sont pas proportionnelles, et donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exemple (figure 26) : Dans un repère, on a :

$\vec{u}\begin{pmatrix}-7\\+2\end{pmatrix}$ , $\vec{v}\begin{pmatrix}+4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-6\\+1{,}5\end{pmatrix}$ .

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
b) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?




a) On a donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-7\\+2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}+4\\-1\end{pmatrix}$ . Le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se calcule comme suit :

$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} -7 & +4 \\ +2 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{(-7)\times(-1)}_{\text{première diagonale}} - \underbrace{2\times 4}_{\text{deuxième diagonale}} = 7-8 = -1 \neq 0$

(le déterminant se note entre deux barres verticales)

Le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'est pas égal à zéro. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

Remarque : calculer le déterminant revient à faire un produit en croix dans un tableau pour savoir si c'est un tableau de proportionnalité : ici, on regarde si $(-7)\times(-1)$ est égal ou non à $2\times 4$ .

b) On a $\vec{v}\begin{pmatrix}+4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-6\\+1{,}5\end{pmatrix}$.

$\det(\vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 1{,}5 \end{vmatrix} = 4 \times 1{,}5 - (-1)\times(-6) = 6 - 6 = 0.$

Le déterminant de $\vec{v}$ et de $\vec{w}$ est nul, donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

Dans le manuel Math'x 2$^{\text{nde}}$ édition 2010 n°64 et 65 page 334, n°93 p 336, (121 p 340).

## 5) Applications de la colinéarité en géométrie.

### a) Pour prouver un parallélisme ou un non-parallélisme.

Exemple : on veut savoir si deux droites (AB) et (CD) sont parallèles. (On a bien sûr A≠B et C≠D, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont non-nuls). Elle seront parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Méthode : On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{CD}$, et on détermine par le calcul du déterminant si ces vecteurs sont colinéaires :
S'ils le sont, (AB) et (CD) seront parallèles. S'ils ne le sont pas, (AB) et (CD) ne seront pas parallèles.

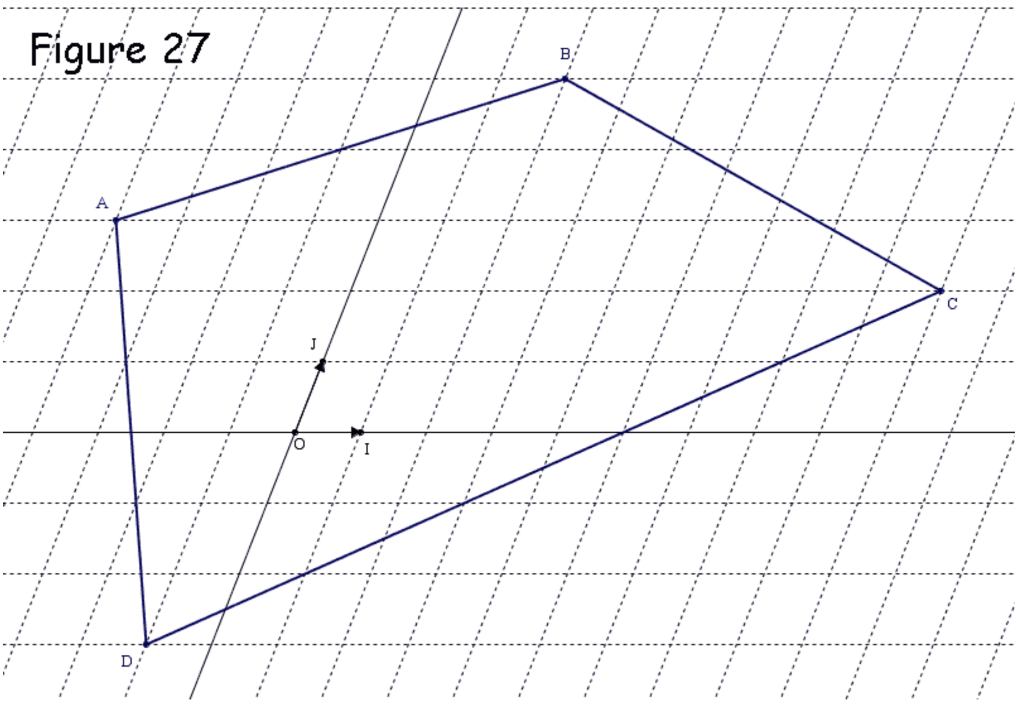
Exemple : dans un repère quelconque, on donne :

A $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}$ et D $\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$.

On veut savoir si le quadrilatère ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD].

Rappel : un trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés parallèles, qu'on appelle ses bases.




On commence par calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-4)\\5-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2+4\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -1-9 \\ -3-2 \end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 6 & -10 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 6\times(-5)-2\times(-10) = -30+20 = 10 \qquad 10 \neq 0$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires. Donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.
Donc ABCD n'est pas un trapèze de bases [AB] et [CD]

On peut retenir si l'on veut :

Pour A, B, C, D quatre points du plan distincts, les droites (AB) et (CD) seront parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Dans le manuel Math'x 2nde édition 2010 : n°69 et 70 p 334, n°78 p 335 ( erreur de texte), 95, 97, 98, 99 p 336

b) Pour prouver un alignement ou un non-alignement.

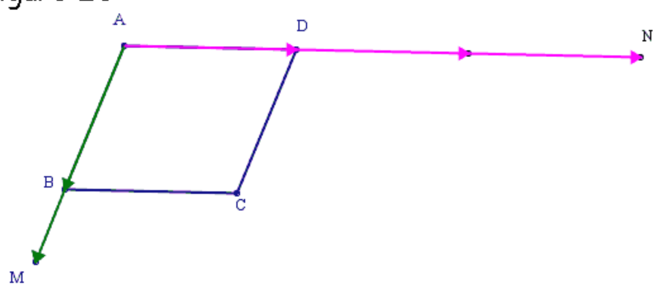
A est commun aux deux vecteurs

Propriété 4 : Trois points A, B, C seront alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Remarque : c'est aussi valable avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ou avec $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ : l'important est qu'un même point soit cité dans les noms des deux vecteurs, et que les deux autres apparaissent l'un dans l'un l'autre dans l'autre.

Exemple : Soit ABCD un parallélogramme.
On considère les points M et N tels que :
$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$.
On veut savoir si M, N et C sont alignés.

Figure 28




Idée : exprimer $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AD}$ et regarder s'ils sont colinéaires.

$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}$ d'après la relation de Chasles.
Or $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$ puisque ABCD est un parallélogramme (théorème 1).
Donc $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, puisque $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ par hypothèse.

Donc $\boxed{\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}}$ *(Note pour les curieux et les futurs élèves de filières scientifiques : cela signifie que les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{CM}$ *sont* $\frac{1}{2}$ *et* $-1$ *dans le repère* $(A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD})$ *ou même, plus précisément, dans la base (* $\overrightarrow{AB}$ *;* $\overrightarrow{AD}$ *).*

$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}$ d'après la relation de Chasles.
Or $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ puisque ABCD est un parallélogramme (théorème 1).
Donc $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{AD}$, puisque $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AD}$ par hypothèse.
Donc $\overrightarrow{CN}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{AD}$, soit $\boxed{\overrightarrow{CN}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}}$ (car $-\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AD}$, voir règles de calcul plus loin)
(Cela signifie que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CN}$ sont $-1$ et 2 dans la base ( $\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{AD}$ ).)

Les deux égalités encadrées nous permettent de remarquer que $\boxed{\overrightarrow{CN}=-2\overrightarrow{CM}}$.

En effet : $-2\overrightarrow{CM}=-2\times\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=-2\times\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\times\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CN}$ (voir règles de calcul au IV)

Il existe un réel $k=-2$ tel que $\overrightarrow{CN}=-2\overrightarrow{CM}$, les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ sont donc colinéaires, les points M, N et C sont donc alignés.

Une autre manière de traiter cette exercice aurait été de se placer dans le repère (A, B, D), d'expliciter les coordonnées de chacun des points dans ce repère, et de faire des calculs à partir des coordonnées.

*J'ai fait exprès, en cette fin de leçon, de choisir un exercice un peu plus costaud, qui initie la manière de travailler dans les filières scientifiques et techniques, où les vecteurs sont très utilisés, notamment en sciences physiques. Mais j'aurais pu me contenter de donner les coordonnées de trois points dans un repère et de demander s'ils sont alignés ou non.*

Dans le manuel Math'x 2nde édition 2010 : n°71, 72, 73 (erreur de texte à corriger !) p 334, 74, 76, 79 p 335, 94 et 96 p 336, 102 p 337, 103 et 104 p 338.

## IV- Calculer avec des vecteurs.

Voici des petites règles qui permettent de faire du calcul vectoriel, comme on vient de voir dans l'exemple précédent. On peut les démontrer facilement en attribuant des coordonnées littérales aux vecteurs et en faisant des calculs sur ces coordonnées (voir exercice 68 p 334 dans le manuel Math's 2nde éditions 2010 par exemple)

| Règles : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs, k et k' des réels. | Exemples d'utilisations : |
|---|---|
| L'addition vectorielle est commutative : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ . | $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ (pour réduire avec la relation de Chasles) |
| Règle du produit nul : $k\vec{u}=\vec{0} \Leftrightarrow$[3] $k=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$ | $3\vec{u}=\vec{0} \Rightarrow$[4] $\vec{u}=\vec{0}$<br>$-3\overrightarrow{AM}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\vec{0} \Rightarrow A=M$ |
| Pour $k\neq 0$, $\vec{v}=k\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u}=\frac{1}{k}\vec{v}$ | $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ |
| La multiplication par un réel se distribue sur une somme ou une différence de vecteurs : $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$<br>$k(\vec{u}-\vec{v})=k\vec{u}-k\vec{v}$ | $-3(\vec{u}+\vec{v}-\vec{w})=-3\vec{u}-3\vec{v}+3\vec{w}$<br>$-4\left(3\vec{u}-\frac{1}{4}\vec{v}\right)=-4\times 3\vec{u}+4\times\frac{1}{4}\vec{v}=-12\vec{u}+\vec{v}$ |
| La multiplication par un vecteur se distribue sur une somme ou une différence de réels : $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$<br>$(k-k')\vec{u}=k\vec{u}-k'\vec{u}$ | Cette règle permet de réduire une somme : $3\vec{u}-6\vec{u}+7\vec{u}=\underbrace{4}_{3-6+7}\vec{u}$<br>$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$<br>(car $1+\frac{1}{2}=\frac{1\times 2}{1\times 2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$) |
| $k(k'\vec{u})=(kk')\vec{u}$ | $3\times(-2\overrightarrow{AB})=-6\overrightarrow{AB}$ |

- L'outil « vecteur », qui donne des précisions à la fois sur le parallélisme, le sens et les longueurs, permet de remplacer les démonstrations en français (pas toujours très précises) par des calculs (eux, très précis).

  Exercices : 101 p337, 106, 107, 108 et 112*, 114 (erreur de texte : $\overrightarrow{AP}$ au lieu de [PA] ) p 338, n°115, 117, 118, 119 et 120 p 339,

---

3 « $\Leftrightarrow$ » signifie « équivaut à »

4 « $\Rightarrow$ » signifie « implique ».