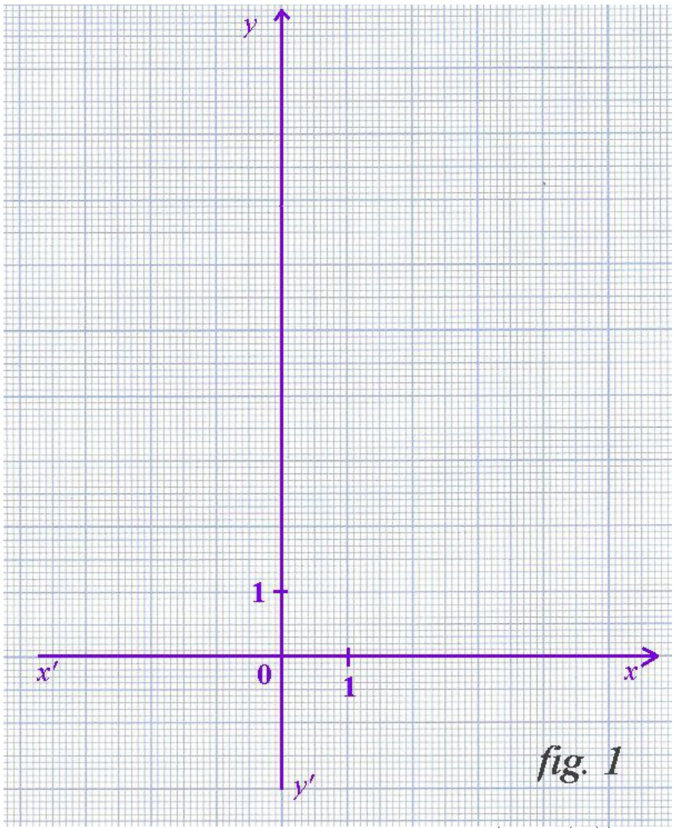
2nde – Programmes 2010 – Chapitre VII :

La fonction carré

I- Présentation de la fonction carré.



Placer les points dont les coordonnées sont $(x\,,f(x))$ du tableau de valeurs et tracer une allure de la **parabole** d'équation $y=x^2$, qui est la courbe représentative de f .

Dans cette leçon, nous nommerons f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=x^2$.

Définie sur ℝ : cela signifie que tous les réels peuvent être antécédents par cette fonction.
Définie par $f(x)=x^2$: cela signifie que l'image d'un réel x par cette fonction est le carré de ce réel : x^2 .

Autre manière de le noter : $f: x \longmapsto x^2$
lire : « f est la fonction qui à x associe x au carré »

Remarquer : la flèche avec un petit trait à sa base, caractéristique des fonctions : « qui à … associe ... »

Le « must », c'est de noter comme suit :

$$f\ :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

On dit : « f est la fonction définie sur ℝ à valeurs dans ℝ, qui à x associe x au carré. »

Le premier ℝ, c'est l'ensemble de définition de la fonction.

Le second ℝ indique que les images par cette fonction sont des réels, mais tous les réels n'ont pas besoin d'être des images par f .

À l'aide du menu TABLE de votre calculatrice, remplissez le tableau de valeurs suivant.
(Donner les valeurs des images arrondies à 0,01 près) :

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0	$0{,}25$	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3	$3{,}5$
$f(x)$																

Par lecture graphique de la courbe, compléter le tableau de variations de la fonction (on admettra qu'il est exact et on n'indiquera pas les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ car ce n'est pas au programme) :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	

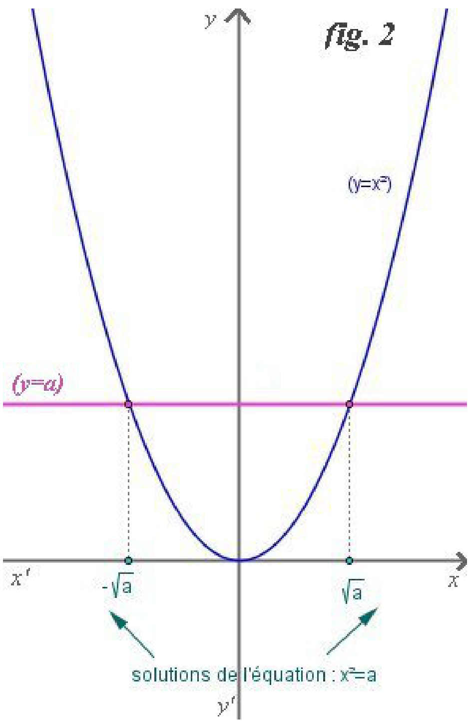
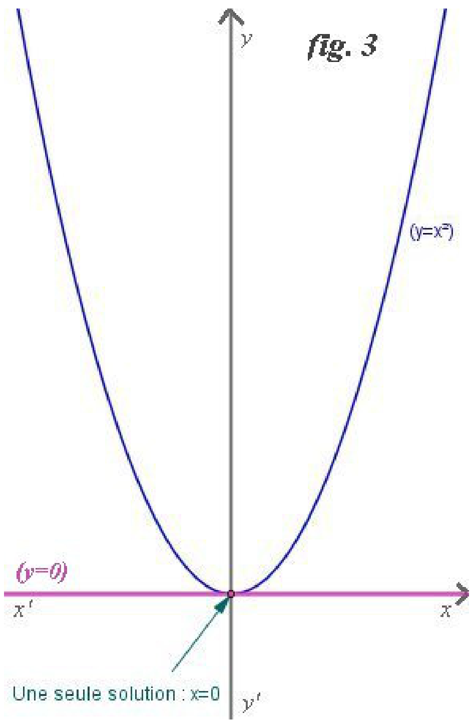
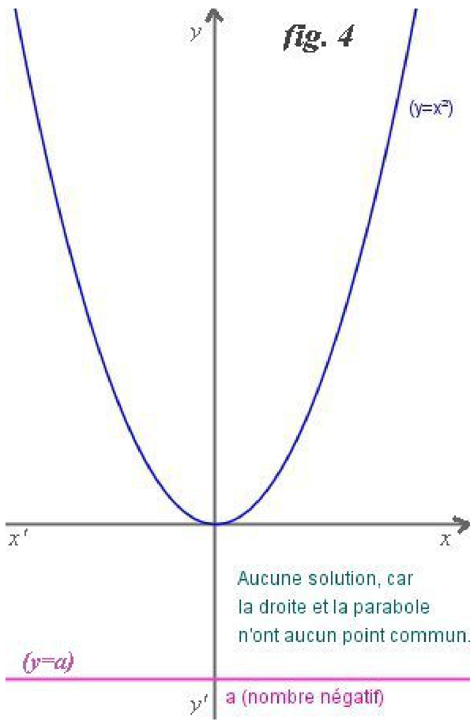
La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, ce qui implique que ***tout réel et son opposé ont la même image*** par f . On note : $\underbrace{\forall\, x \in \mathbb{R}}_{\text{(quel que soit } x \text{ appartenant à } \mathbb{R})},\ f(-x)=f(x)$.

Ici en particulier : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ (-x)^2=x^2$.
Les fonctions qui ont cette particularité (dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées) sont appelées des **fonctions paires**.

II- Les équations du type $x^2=a$.

a est un réel donné.
Dans chacun des trois cas suivants, nous avons tracé :

- La parabole d'équation $\boxed{y=x^2}$ (= la courbe représentative de la fonction « carré »)
- La droite d'équation $\boxed{y=a}$. (Rappel : c'est une droite parallèle à l'axe des abscisses, et la courbe représentative d'une fonction constante).

Lorsque $a>0$	Lorsque $a=0$	Lorsque $a<0$
		
L'équation $x^2=a$ admet deux solutions : $x=\sqrt{a}$ et $x=-\sqrt{a}$.	L'équation $x^2=0$ admet une seule solution : $x=0$.	L'équation $x^2=a$ n'admet aucune solution.
$\boxed{S=\{-\sqrt{a};\sqrt{a}\}}$	$\boxed{S=\{0\}}$	$\boxed{S=\varnothing}$

Exemples d'applications :

Résolvons l'équation $(5x-2)^2=36$.

C'est une équation du type $X^2=a$ avec $X=5x-2$, et $a=36$.

$$\begin{aligned}(5x-2)^2=36 &\Leftrightarrow 5x-2=\sqrt{36} \text{ ou } 5x-2=-\sqrt{36}\\ &\Leftrightarrow 5x-2=6 \text{ ou } 5x-2=-6\\ &\Leftrightarrow 5x=8 \text{ ou } 5x=-4\\ &\Leftrightarrow x=\frac{8}{5} \text{ ou } x=-\frac{4}{5}\end{aligned}$$

$$S=\left\{-\frac{4}{5};\frac{8}{5}\right\}$$

Une résolution plus classique de cette équation consiste à rassembler les termes dans le 1er membre, à le factoriser à l'aide de la 3ème identité remarquable et à utiliser la règle du produit nul.

Résolvons l'équation $(x-11)^2=0$.

C'est une équation du type $X^2=a$ avec $X=x-11$ et $a=0$.

$$(x-11)^2=0 \Leftrightarrow x-11=0 \Leftrightarrow x=11 .$$

$$S=\{11\}$$

Résolvons l'équation : $(3x^2-7x+2)^2=-4$.

C'est une équation du type $X^2=a$ avec $a<0$ et $X=3x^2-7x+2$.

$S=\varnothing$ car le carré d'un réel ne peut être négatif.

III- Les inéquations du type $x^2>a$, $x^2\geqslant a$, $x^2<a$ et $x^2\leqslant a$. Exemples avec $a>0$:

- On souhaite résoudre l'inéquation $x^2\leqslant 2{,}4$.

Sur le graphique, on a représenté: la parabole d'équation $\boxed{y=x^2}$ et la droite d'équation $\boxed{y=2{,}4}$.

Les points de la parabole dont l'ordonnée est inférieure ou égale à 2,4 se situent sur et en-dessous de la droite d'équation $y=2{,}4$.

Leurs abscisses sont les nombres de l'intervalle $[-\sqrt{2{,}4};\sqrt{2{,}4}]$.

Résolution algébrique de cette inéquation :

$x^2\leqslant 2{,}4 \Leftrightarrow -\sqrt{2{,}4}\leqslant x\leqslant\sqrt{2{,}4}$

$$\boxed{S=[-\sqrt{2{,}4};\sqrt{2{,}4}]}$$

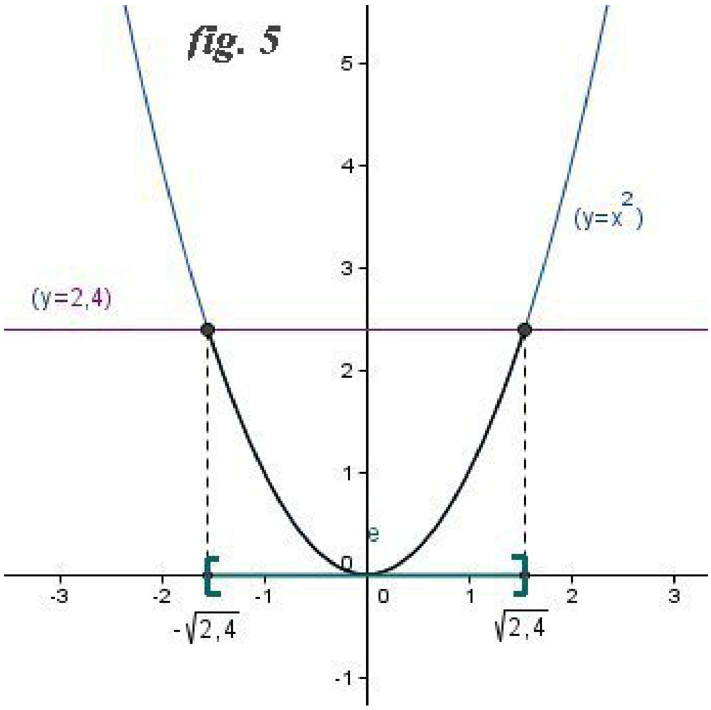


fig. 5

<u>Remarque</u> : la lecture graphique, ici, n'est qu'un support de compréhension à la résolution algébrique. Celle-ci, qui a valeur de preuve, se justifie par le tableau de variations de la fonction carré. On rappelle qu'une lecture graphique, elle, n'a pas valeur de preuve.

On souhaite résoudre l'inéquation $x^2\geqslant 4$.

Sur le graphique, on a représenté: la parabole d'équation $\boxed{y=x^2}$ et la droite d'équation $\boxed{y=4}$.

Les points de la parabole dont l'ordonnée est supérieure ou égale à 4 se situent sur et au-dessus de la droite d'équation $y=4$.

Leurs abscisses sont les nombres des intervalles $]-\infty;-2]$ et $[2;+\infty[$.

Résolution algébrique :

$x^2\geqslant 4 \Leftrightarrow x\leqslant-\sqrt{4}$ ou $x\geqslant\sqrt{4}$

$\Leftrightarrow x\leqslant -2$ ou $x\geqslant 2$

$$\boxed{S=]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[}$$

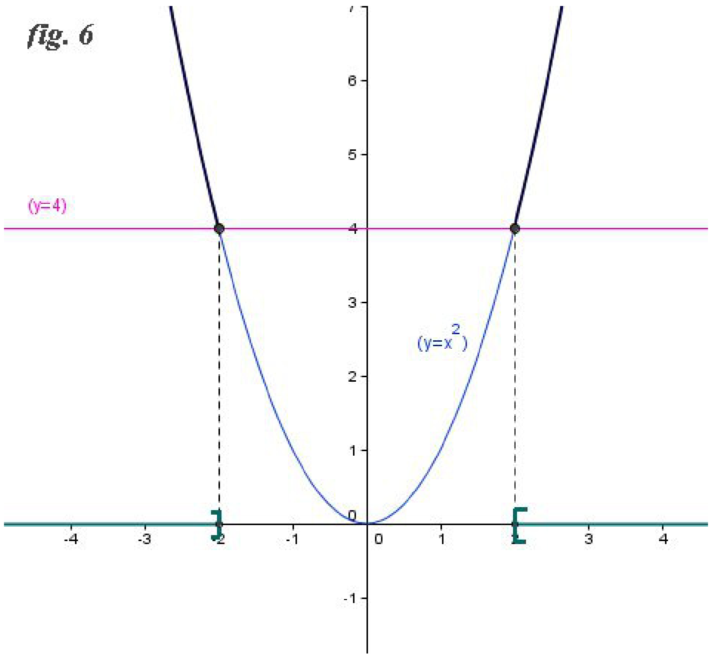


fig. 6

- <u>Application</u> : résolvons l'inéquation $(7-x)^2\geqslant 9$.

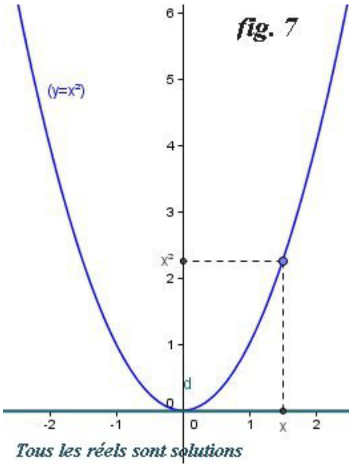
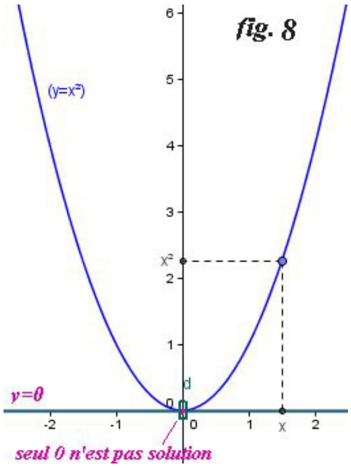
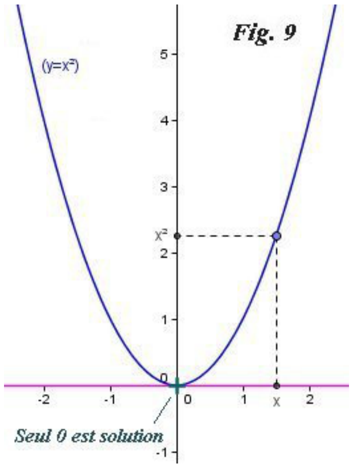
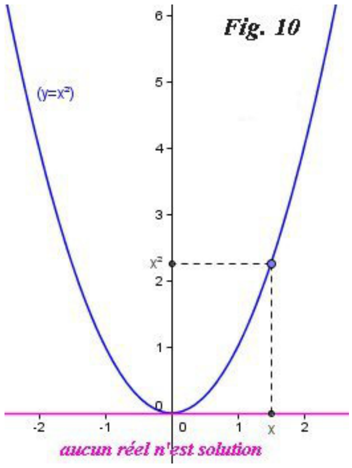
Elle est du type $X^2\geqslant 9$ avec $X=7-x$. Or $X^2\geqslant 9 \Leftrightarrow X\leqslant-\sqrt{9}$ ou $X\geqslant\sqrt{9}$ (cf. exemple précédent)

$(7-x)^2\geqslant 9 \Leftrightarrow 7-x\geqslant-\sqrt{9}$ ou $7-x\leqslant\sqrt{9} \Leftrightarrow 7-x\leqslant -3$ ou $7-x\geqslant 3$

$\Leftrightarrow -x\leqslant -10$ ou $-x\geqslant -4 \Leftrightarrow x\geqslant 10$ ou $x\leqslant 4$ $\boxed{S=]-\infty;4]\cup[10;+\infty[}$

<u>Remarque</u> : une autre méthode consiste à rassembler les termes de cette inéquation dans le 1er membre, à le factoriser à l'aide de la troisième identité remarquable et à utiliser un tableau de signes.

Avec $a=0$:

$x^2 \geqslant 0$	$x^2 > 0$	$x^2 \leqslant 0$	$x^2 < 0$
			
$\boxed{S=\mathbb{R}}$	$\boxed{S=\mathbb{R}^*}$ ou $\boxed{S=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[}$	$\boxed{S=\{0\}}$	$\boxed{S=\varnothing}$
puisque le carré de tout réel est positif ou nul, d'après la règle des signes.	Seul 0 n'a pas un carré strictement positif.	0 est le seul réel dont le carré soit négatif ou nul (en l'occurrence : nul)	puisque le carré de tout réel est positif ou nul, d'après la règle des signes.

Application : Résolvons l'inéquation $x^2 \leqslant 2x-1$.

$x^2 \leqslant 2x-1 \Leftrightarrow x^2-2x+1 \leqslant 0$ en retranchant $2x-1$ aux deux membres

$\Leftrightarrow (x-1)^2 \leqslant 0$ en factorisant le premier membre à l'aide de la deuxième identité remarquable

$\Leftrightarrow x-1=0$ puisque seul 0 a un carré négatif ou nul (cas de la figure 9)

$\Leftrightarrow x=1$ $\boxed{S=\{1\}}$

Avec a strictement négatif :

Fig. 11

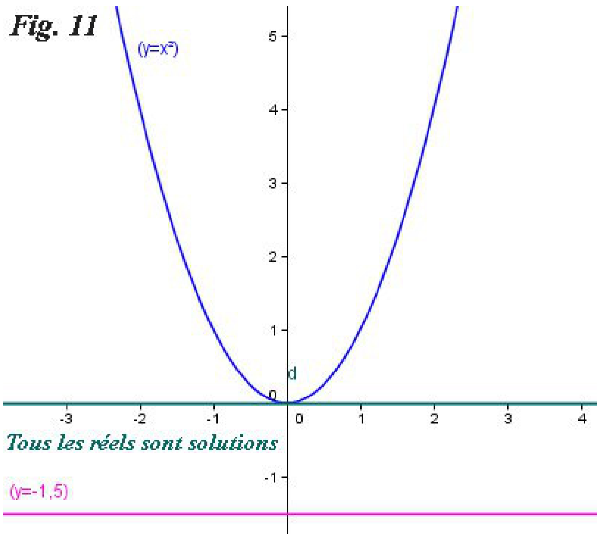
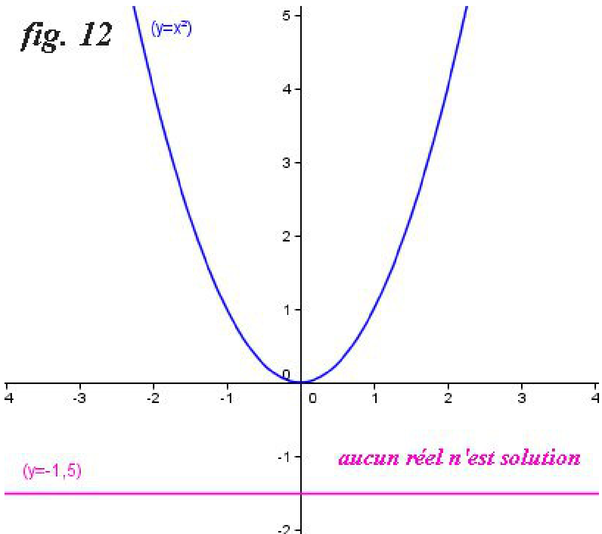


fig. 12



Les inéquations $\boxed{x^2>a}$ et $\boxed{x^2 \geqslant a}$ auront pour solutions tous les réels, puisque tous les réels ont un carré positif ou nul d'après la règle des signes, donc nécessairement plus grand qu'un nombre négatif.

$\boxed{S=\mathbb{R}}$

Les inéquations $\boxed{x^2<a}$ et $\boxed{x^2 \leqslant a}$ n'auront aucune solution, le carré d'un réel ne pouvant être plus petit qu'un nombre négatif.

$\boxed{S=\varnothing}$

IV- Les comparaisons et encadrements.

Ils résulteront du tableau de variations de la fonction carré ($f : x \longmapsto x^2$) :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

On rappelle :

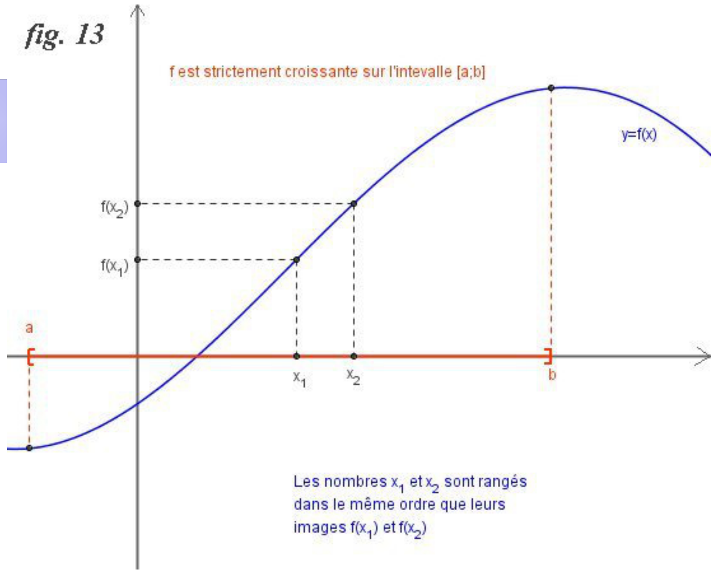


fig. 13

Définition 1 : une fonction est croissante sur un intervalle si et seulement si elle conserve l'ordre sur cet intervalle.

Conséquence : si x_1 et x_2 sont deux réels d'un même intervalle I sur lequel une fonction f est croissante, x_1 et x_2 seront rangés dans le même ordre que leurs images $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

Sur la figure, on a $x_1 < x_2$,
f strictement croissante sur un intervalle comprenant x_1 et x_2,
donc on aura $f(x_1) < f(x_2)$.

Exemple avec la fonction carré : Comparons 3^2 et π^2.
3 et π sont dans l'intervalle [0;+∞[sur lequel la fonction carré est strictement croissante.
Comme 3<π, on aura : $\boxed{3^2 < \pi^2}$, puisqu'une fonction strictement croissante conserve l'ordre.

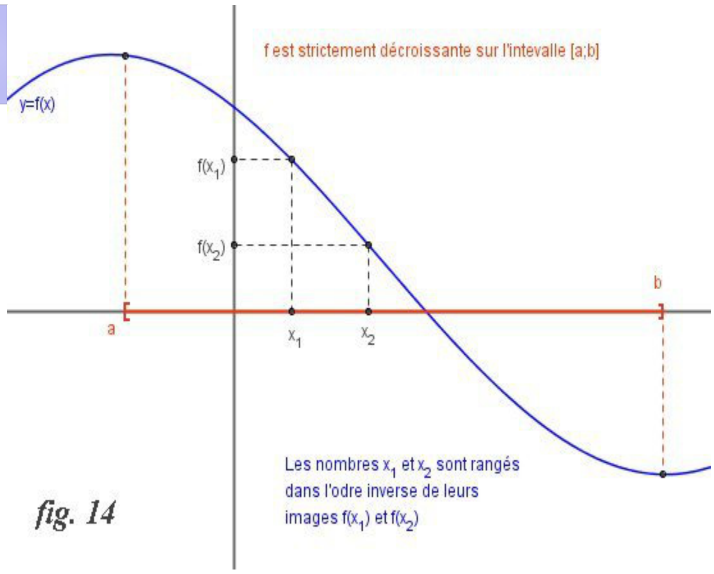


fig. 14

Définition 2 : Une fonction est décroissante sur un intervalle si et seulement si elle intervertit l'ordre sur cet intervalle.

Conséquence : si x_1 et x_2 sont deux réels d'un même intervalle I sur lequel une fonction f est décroissante, x_1 et x_2 seront rangés dans l'ordre contraire de celui de leurs images $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

Sur la figure, on a $x_1 < x_2$,
f strictement décroissante sur un intervalle comprenant x_1 et x_2,
donc on aura $f(x_1) > f(x_2)$.

on change le sens de l'inégalité

Exemple avec la fonction carré : On sait que x appartient à l'intervalle $[-3;-1]$. On veut encadrer x^2.

$-3 \leqslant x \leqslant -1 \Leftrightarrow (-3)^2 \geqslant x^2 \geqslant (-1)^2$ soit $9 \geqslant x^2 \geqslant 1$, c'est-à-dire $1 \leqslant x^2 \leqslant 9$. $x^2 \in [1;9]$

on change le sens des inégalités

Car -3, x et -1 sont tous trois dans l'intervalle]–∞;0] sur lequel la fonction f est strictement décroissante.

Et si on voulait encadrer x^2 dans le cas où $-3<x\leqslant 2$?

Reprenons le tableau de variations de notre fonction carré :

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	

Lorsque x vaut -3, $f(x)=9$.
La fonction est décroissante sur l'intervalle $[-3;0]$, jusqu'à atteindre un minimum de 0 en 0.
Ensuite, elle est croissante sur [0;2] et vaut 4 lorsque $x=2$.

Bilan : lorsque $-3<x\leqslant 2$, $\boxed{0\leqslant x^2<9}$.

Même si elle n'est pas nécessaire pour raisonner (les informations du tableau de variations suffisent), on peut tout de même illustrer ce raisonnement à l'aide de la courbe :

Fig. 15