2^{nde} – Exercices sur la fonction carré.

Exercice 1 : 1) Quelles sont les images, par la fonction carré, des réels : 5, -4 , 0,5 , $\frac{5}{3}$, $\sqrt{17}$, $-5\sqrt{2}$, -10^3 et 10^{-7} ?

2) Trouver l'ensemble des antécédents par la fonction carré des nombres suivants : 9, 36, -49 , 6, 12, $-\pi$, 0 et 10^{-4} ?

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes :

1) $x^2=-36$, $x^2=64$, $x^2=0$, $x^2=8$.

2) $(x-3)^2=16$, $(7x-9)^2=-36$, $(x+4)^2=7$

Exercice 3 : Résoudre les inéquations suivantes :

Dans les questions 1) et 2), on pourra s'aider d'un graphique ou simplement du tableau de variations de la fonction carré.

1) $x^2\geqslant 5$, $x^2>4$, $x^2\leqslant -1{,}5$, $x^2\leqslant 12$, $4<x^2\leqslant 25$.

2) $(3x+5)^2<36$, $(10-2x)^2\geqslant 100$

Dans cette question 2), on peut aussi rassembler les termes dans le 1^{er} membre, factoriser à l'aide de la troisième identité remarquable[1] et utiliser un tableau de signes. Essayer les deux méthodes et comparer les résultats.

3) (Seule la deuxième méthode est possible pour résoudre les inéquations comme) $(x-5)^2\leqslant(6-2x)^2$, $x^2-4x+4>4x^2$.

Exercice 4 : Dans cet exercice, on se propose de prouver que la fonction carré est strictement décroissante sur]–∞;0] et strictement croissante sur [0;+∞[, ce qui a été admis dans le cours. On la nomme ici *f*.

1) Prouvons que la fonction carré est strictement croissante sur [0;+∞[. x_1 et x_2 sont deux nombres quelconques de l'intervalle [0;+∞[, tels que $x_1<x_2$.

a) Calculer et factoriser $f(x_2)-f(x_1)$

b) Quel est le signe de $f(x_2)-f(x_1)$? Justifier.

c) Comparer alors $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

d) La fonction carré a-t-elle conservé l'ordre ? Conserve-t-elle l'ordre sur l'intervalle [0;+∞[? Conclure.

2) Recommencer les étapes de la question 1, à la différence que x_1 et x_2 sont maintenant dans l'intervalle]–∞;0]

Exercice 5: Comparer :

1) 205^2 et $205{,}1^2$. 2) $(-404{,}5)^2$ et $(-412{,}2)^2$

3) $(-100{,}5)^2$ et $100{,}25^2$

4) $\sqrt{\frac{24}{7}}$ et $\sqrt{\frac{10}{3}}$ 5) $-\sqrt{\frac{11}{5}}$ et $-\sqrt{\frac{13}{6}}$

Exercice 6[2] : 1) On sait que $1<x\leqslant 4$.
Donner un encadrement de : x^2 , x^2-5 , $(x-5)^2$, $-3x^2+8$, $(2x-10)^2$, $(-x)^2$ et $(5-x)^2$.

2) On sait que $-7<x<-4$. Donner un encadrement de x^2 , x^2+10 , $(x+10)^2$, $\left(\frac{x+5}{2}\right)^2$.

Exercice 7 : un jardin est formé d'un carré herbeux et fleuri de x mètres de côté bordé tout autour d'une allée de 2 mètres de large.

1) Quelle est l'aire du petit carré (en fonction de *x*) ?

2) Quelle est l'aire du grand carré (en fonction de *x*) ?

3) Quelle est l'aire de la partie « allées » (en fonction de *x*) ?

4) On veut que le grand carré ait une aire de 49 m^2 . Combien doit valoir x ?

5) On veut que la partie « allées » représente 50% de la surface totale du jardin.

a) Montrer que, pour que ce soit le cas, il faut et il suffit que x^2 soit égal à $8x+16$.

b) Dans un même repère, tracer les courbes représentatives de la fonction carré que nous nommerons *f* et de la fonction affine *g* définie par $g(x)=8x+16$ sur l'intervalle [0;12] en choisissant comme unités : 1 grand carreau pour représenter 1 mètre en abscisse et 1 grand carreau pour représenter 10 mètres carrés en ordonnée.

c) Lire une approximation à 0,1 près de la longueur de x pour laquelle les allées représentent 50% de la surface du jardin.

Par une résolution algébrique, on trouverait $4+4\sqrt{2}$. Est-ce proche du résultat que vous lisez graphiquement ?

Et comment ferait-on pour trouver ce résultat ? Avec le programme de seconde, on peut prouver que $x^2=8x+16$ équivaut à $x^2-8x+16-32=0$. Factorisez $x^2-8x+16$ et essayez de résoudre cette équation en écrivant 32 sous la forme $(4\sqrt{2})^2$.

1 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

2 Revoir éventuellement la fiche « Règles sur l'ordre ».