2^{nde} – Feuille d'exercices n°4
Probabilités : les exercices classiques.

Exercice 1 : Pile ou face.

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie usuelle. On obtient ainsi une suite de trois résultats. Par exemple, « pile, pile, face » sera noté PPF.
On suppose que la pièce est bien équilibrée et, qu'à chaque lancé, on a la même probabilité d'obtenir pile que d'obtenir face.

1) Représentez cette situation par un arbre.
2) Calculer la probabilité des événements suivants :
A = « Les trois résultats sont identiques »
B = « La suite des trois résultats commence par pile. »
C = « On obtient une seule fois pile. »
D = « On obtient au moins une fois pile. »

Exercice 2 : Un jeu de 32 cartes.

À savoir : dans un jeu de 32 cartes, 8 sont des ♥, 8 sont des ♦, 8 sont des ♣ et 8 sont des ♠. Dans chacune de ces séries de 8, il y a 3 figures : le roi, la dame et le valet, et il y a un as, un 7, un 8, un 9 et un 10.

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes[1].

1) Quelle est la probabilité d'obtenir un 7 ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir un ♥ ?

Notons les issues possibles comme suit : 7P (obtenir le 7 de pique), DC (obtenir la dame de cœur), AT (obtenir l'as de trèfle), VK (obtenir le valet de carreau), etc...

On définit les événements :
F = « obtenir une figure »
A = « obtenir un as »
K = « obtenir un carreau ».

3) Expliciter l'événement A en notation ensembliste (= avec les issues entre accolades séparées par des ;). Combien contient-il d'issues ?

4) Expliciter l'événement $F\cap K$:
   a) Sous forme d'une phrase.
   b) En notation ensembliste
c) Puis calculer sa probabilité $P(F\cap K)$.

5) Lequel des événements suivants est-il un événement élémentaire ? Lequel est l'événement impossible ? Combien d'issues contiennent les autres ?
$A\cap K$, $A\cup K$, $F\cap K$, $F\cup K$, $A\cap F$, $A\cup F$.

6) Calculer la probabilité de chacun des événements de la question 5. (De deux manières pour $A\cup K$ et $F\cup K$)

7) Décrire par une phrase l'événement $\overline{F}$ et calculer sa probabilité.

8) Même question avec l'événement $\overline{F\cup K}$

9) Même question avec l'événement $\overline{R\cap K}$

10) Certains, parmi les événement suivants, sont les mêmes. Lesquels ?
$\overline{F\cup K}$ $\overline{F}\cup\overline{K}$ $\overline{F\cap K}$ $\overline{F}\cap\overline{K}$

Exercice 3 : Une urne et des boules, avec et sans remise.

Une urne contient 3 boules vertes et 2 boules rouges.
On procède à deux tirages successifs d'une boule au hasard dans l'urne.

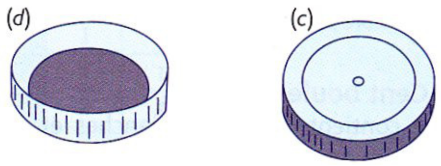
Dans chacun des deux cas suivants, représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré (cela signifie qu'il faut indiquer les probabilités sur les branches) et calculer la probabilité des événements suivants :

D= « Les deux boules tirées sont de couleurs différentes. »
A= « Au mois l'une des deux boules tirées est rouge. »

Premier cas : on remet la première boule dans l'urne après l'avoir tirée.

Deuxième cas : on tire la seconde boule sans avoir remis la première dans l'urne.

Exercice 4 : un lancer de bouchon : un pile ou face non équiprobable.



On lance un bouchon, et on remarque qu'il peut tomber sur le dos (d) ou sur le côté creux (c), mais pas avec la même probabilité.
On a lancé 500 fois ce bouchon et obtenu 390 fois (d) et 110 fois (c).

La loi des grands nombres nous dit que : « Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences obtenues dans une série de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand. »

Ici, on a n=500 et on suppose ce nombre assez grand pour identifier les fréquences de chaque résultat obtenu avec sa probabilité lors d'un lancer.

1 On sous-entend qu'on est dans un cas d'équiprobabilité.

1) En suivant ce modèle, quelle est la probabilité d'obtenir chacun des résultats (d) et (c) lors d'un lancer ? (en faisant un tel tableau, on dit qu'on établit une loi de probabilité)

Résultats possibles :	x_i	(d)	(c)
Probabilité d'obtenir chaque résultat :	p_i		

2) On lance à présent le bouchon deux fois. Avec la loi adoptée dans la question précédente, donnez la probabilité que le bouchon tombe sur le dos :
a) deux fois. b) une fois. c) zéro fois.

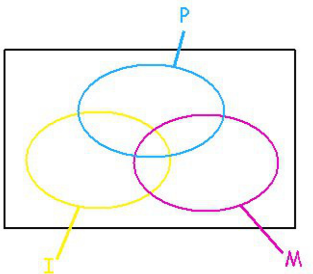
Exercice 5 : Utilisons un diagramme de Venn.

Au foyer du lycée, parmi toutes les activités possibles, figurent : Informatique, Musique et Photo. Un même élève peut pratiquer plusieurs activités.

Sur les n élèves inscrits au foyer :

- 22 font de l'informatique
- 25 font de la musique
- 22 font de la photo
- 7 font les trois activités à la fois
- 33 ne font aucune de ces trois activités
- 9 font musique et photo
- 12 font informatique et photo
- 15 font seulement de la musique

1) a) Compléter le diagramme de Venn suivant :



b) En déduire la valeur de n.

2) Si l'on rencontre un élève du foyer au hasard, quelles sont les probabilités :
a) Qu'il ne fasse que de la photo ?
b) Qu'il fasse de la musique et de la photo, mais pas de l'informatique ?
c) Qu'il fasse de la photo, sachant qu'il fait de l'informatique ?
d) Qu'il ne fasse pas d'informatique, sachant qu'il ne fait pas de musique ?

On pourra noter I, M et P les événements : « l'élève rencontré fait de l'informatique, de la musique, de la photo, et exprimer les réponses aux questions 2 c) et d) à l'aide de ces événements.

Exercice 6 : Simulons un lancer de dé(s) à 6 faces équilibré(s) avec la calculatrice.

1) Entrer dans la calculatrice l'instruction Ran# (dans OPTN-PROB-RAND sur CASIO) ou NbreAleat (MATH-PRB-1 sur TI).
Dans quel intervalle se trouvent les résultats obtenus ?

2) On cherche à simuler le lancer d'un dé équilibré à 6 faces, c'est-à-dire à obtenir aléatoirement les résultats 1-2-3-4-5-6 avec une probabilité de $\frac{1}{6}$ pour chaque. On suppose que Ran# ne privilégie pas une partie de l'intervalle pour donner ses résultats.
Commençons par multiplier Ran# par 6, dans quel intervalle obtient-on maintenant les résultats ?
Et en ajoutant 1 à 6*Ran# ?

3) Pour que la calculatrice affiche aléatoirement les résultats 1-2-3-4-5-6 avec équiprobabilité, on améliore l'instruction de la question 2 en demandant de n'afficher que la partie entière (= ce qu'il y a avant la virgule) de ce résultat.
L'instruction « partie entière », Int, se trouve dans OPT-NUM sur CASIO. Sur TI, c'est Ent (MATH-NUM-3).
Quelle formule faut-il finalement entrer pour obtenir un nombre au hasard entre 1 et 6 ?

4) Quelle formule doit-on entrer pour simuler le lancer de deux dés équilibrés à 6 faces et qui donne la somme des chiffres affichés par les deux dés ?

5) Simuler 50 lancers, et compléter le tableau suivant (les x_i sont les résultats possibles, les n_i, le nombre de fois où vous avez obtenu le résultat x_i avec le programme, les f_i les fréquences correspondantes (c'est-à-dire les $\frac{n_i}{50}$) et les p_i les probabilité d'obtenir chaque résultat, probabilité qu'il vous faut déterminer à l'aide d'un arbre), arrondir les p_i à 10^{-2} près :

x_i	2	3	4	5	6	7
n_i						
f_i						
p_i						

x_i	8	9	10	11	12
n_i					
f_i					
p_i					

Les fréquences obtenues sont-elles proches des probabilités ? Quels sont les résultats les plus probables lorsqu'on lance deux dés équilibrés et qu'on note la somme des chiffres obtenus ?

Algorithmique : créer un programme qui simule 50 lancers de 2 dés dont on note la somme des chiffres, et qui donne les fréquences des résultats obtenus.