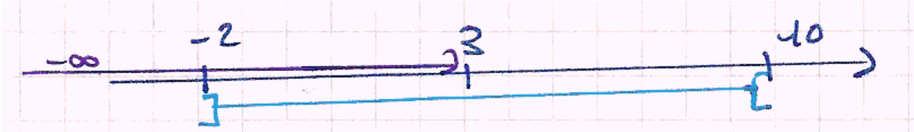
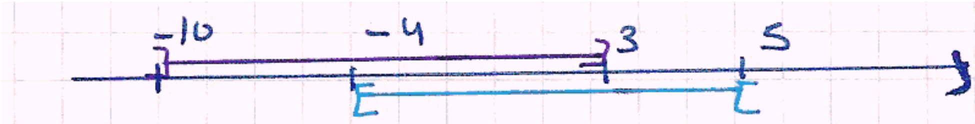
2^{nde} 3 – Corrigé de l'interrogation de mathématiques n°5 – Sujet A – Durée : 2 heures

Exercice 1 :

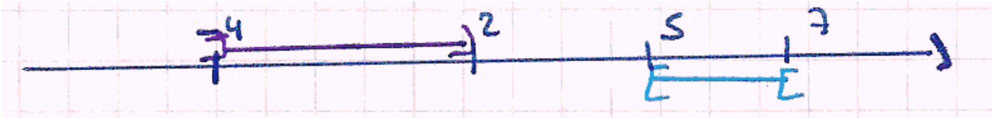
a) $]-\infty\,;3\,]\cup\,]-2\,;10\,[\;=\;]-\infty\,;10\,[$ **a')** $]-\infty\,;3\,]\cap\,]-2\,;10\,[\;=\;]-2\,;3\,]$



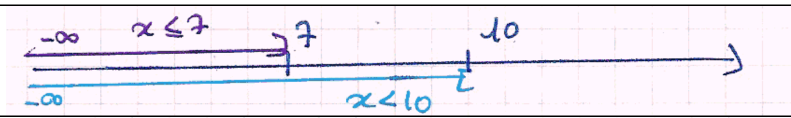
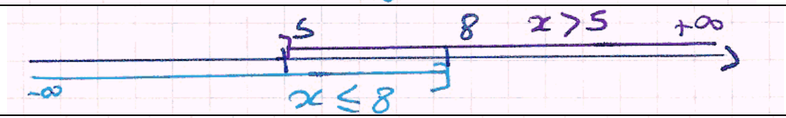
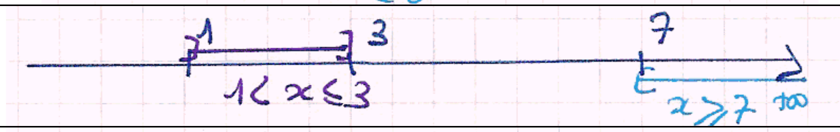
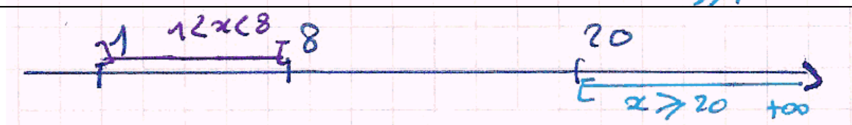
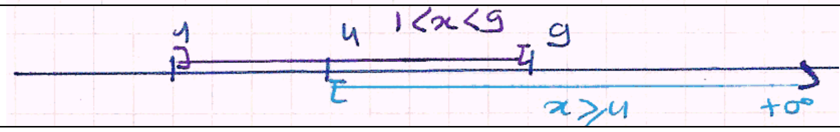
b) $]-10\,;3\,]\cup[-4\,;5\,[\;=\;]-10\,;5\,[$ **b')** $]-10\,;3\,]\cap[-4\,;5\,[\;=\;[-4\,;3\,]$



c) $]-4\,;2\,]\cup[5\,;7\,[\;=\;]-4\,;2\,]\cup[5\,;7\,[$ **c')** $]-4\,;2\,]\cap[5\,;7\,[\;=\varnothing$



Exercice 2 :

$x \leq 7$ et $x < 10$ $x \in\ ]-\infty\,;7\,]$	
$x > 5$ et $x \leq 8$ $x \in\ ]5\,;8\,]$	
$1 < x \leq 3$ ou $x \geq 7$ $x \in\ ]1\,;3\,]\cup[7\,;+\infty\,[$	
$1 < x < 8$ et $x \geq 20$ $x \in \varnothing$	
$1 < x < 9$ ou $x \geq 4$ $x \in\ ]1\,;+\infty\,[$	

Exercice 3 : a, b et c sont trois nombres tels que :
$-1 < a < 3$ $4 < b < 7$ et $-5 < c < -3$.

$-1 < a < 3 \Leftrightarrow 1 > -a > -3$ $\Leftrightarrow -3 < -a < 1$ On change le sens d'une inégalité quand on multiplie ses deux membres par un nombre strictement négatif (ici : – 1)	$-5 < c < -3 \Leftrightarrow -\frac{1}{5} > \frac{1}{c} > -\frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \frac{1}{c} < -\frac{1}{5}$ Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur] – ∞ ; 0 [, le passage à l'inverse inverse l'ordre lorsque tous les nombres sont négatifs.
$-1 < a < 3 \Leftrightarrow -2 < 2a < 6$ (Pas de changement d'ordre quand on multiplie tous les membres par un nombre strictement positif, ici : 2) $4 < b < 7 \Leftrightarrow -12 > -3b > -21$ $\Leftrightarrow -21 < -3b < -12$	$-1 < a < 3 \Leftrightarrow 1 < a + 2 < 5$ (on ne change pas le sens lorsqu'on additionne un même nombre, ici 2, à tous les membres) $4 < b < 7 \Leftrightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{b} > \frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{1}{7} < \frac{1}{b} < \frac{1}{4}$ Comme la fonction inverse est strictement

(on change l'ordre quand on multiplie tous les membres par un nombre strictement négatif, ici – 3) On additionne membre à membre : $-2 < 2a < 6$ $-21 < -3b < -12$ $\underline{-5 < c < -3}$ $-28 < 2a - 3b + c < -9$	décroissante sur] 0 ; + ∞ [, le passage à l'inverse change l'ordre lorsque tous les nombres sont strictement positifs. On multiplie membre à membre (on a le droit parce que tous les nombres sont positifs) : $1 < a + 2 < 5$ et $\frac{1}{7} < \frac{1}{b} < \frac{1}{4}$ Ce qui donne $\frac{1}{7} < \frac{a+2}{b} < \frac{5}{4}$

Exercice 4 :

$\boxed{(E_1)\ (-3x+7)^2 = (-x-5)^2}$

$(E_1) \Leftrightarrow (-3x+7)^2 - (-x-5)^2 = 0$

$(E_1) \Leftrightarrow [(-3x+7) - (-x-5)][(-3x+7) + (-x-5)] = 0$

$(E_1) \Leftrightarrow (-3x+7+x+5)(-3x+7-x-5) = 0$

$(E_1) \Leftrightarrow (-2x+12)(-4x+2) = 0$

$(E_1) \Leftrightarrow -2x+12 = 0$ ou $-4x+2 = 0$

$(E_1) \Leftrightarrow -2x = -12$ ou $-4x = -2$

$(E_1) \Leftrightarrow x = 6$ ou $x = \frac{1}{2}$ **S = { $\mathbf{\frac{1}{2}}$; 6 }**

$\boxed{(I_1)\ (-3x+7)^2 \le (-x-5)^2}$

$(I_1) \Leftrightarrow (-2x+12)(-4x+2) \le 0$ (mêmes calculs que dans (E_1))

On a vu que : $-2x+12$ s'annule pour $x = 6$ et $-4x+2$ pour $x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		6		$+\infty$
$-2x+12$		+		+	0	−	
$-4x+12$		+	0	−		−	
$(-2x+12) \times (-4x-12)$		+	0	−	0	+	

S = [$\mathbf{\frac{1}{2}}$; 6]

$\boxed{(E_2)\ \frac{9}{x^2-16} = \frac{x+4}{x-4}}$

Valeurs interdites :

$x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-4) = 0$

$\Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 4$

Et $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

On résout dans $\mathbb{R}\setminus\{-4 ; 4\}$

$(E_2) \Leftrightarrow \frac{9}{(x-4)(x+4)} = \frac{(x+4)^2}{(x-4)(x+4)}$

Et comme $x \neq 4$ et $x \neq -4$ $(E_2) \Leftrightarrow 9 = (x+4)^2$ $(E_2) \Leftrightarrow 3^2 = (x+4)^2$

$(E_2) \Leftrightarrow x+4 = 3$ ou $x+4 = -3$ $(E_2) \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -7$

– 1 et 7 ne sont pas des valeurs interdites, donc **S = { – 7 ; – 1 }**

$\boxed{(I_2)\ \dfrac{9}{x^2-16} \leq \dfrac{x+4}{x-4}}$ Même ensemble de résolution que (E_2)

$(I_2) \Leftrightarrow \dfrac{9}{(x-4)(x+4)} \leq \dfrac{(x+4)^2}{(x-4)(x+4)}$

$(I_2) \Leftrightarrow \dfrac{9-(x+4)^2}{(x-4)(x+4)} \leq 0$

$(I_2) \Leftrightarrow \dfrac{3^2-(x+4)^2}{(x-4)(x+4)} \leq 0$

$(I_2) \Leftrightarrow \dfrac{(3-(x+4))(3+x+4)}{(x-4)(x+4)} \leq 0$

$(I_2) \Leftrightarrow \dfrac{(-x-1)(x+7)}{(x-4)(x+4)} \leq 0$

On a vu que $-x-1$ s'annule pour $x=-1$ et $x+7$ pour $x=-7$ et que $x-4$ s'annule en 4 et $x+4$ en -4

x	$-\infty$		-7		-4		-1		4		$+\infty$
$-x-1$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{(-x-1)(x+7)}{(x-4)(x+4)}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$S =]-\infty\,;-7] \cup]-4\,;-1] \cup]4\,;+\infty[$

<u>Exercice 4</u> :

$\boxed{\mathbf{(I_3)}\ -5x > -2x+1}$

$(I_3) \Leftrightarrow -3x > 1$

$(I_3) \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{3}$

$S =]-\infty\,;-\dfrac{1}{3}[$

$\boxed{\mathbf{(I_4)}\ 2-\dfrac{3x-7}{4} \geq \dfrac{5-x}{3}}$

$(I_4) \Leftrightarrow \dfrac{8}{4}-\dfrac{3x-7}{4} \geq \dfrac{5-x}{3}$

$(I_4) \Leftrightarrow \dfrac{8-(3x-7)}{4} \geq \dfrac{5-x}{3}$

$(I_4) \Leftrightarrow \dfrac{-3x+15}{4} \geq \dfrac{5-x}{3}$

$(I_4) \Leftrightarrow 3(-3x+15) \geq 4(5-x)$

$(I_4) \Leftrightarrow -9x+45 \geq 20-4x$

$(I_4) \Leftrightarrow -9x+4x \geq 20-45$

$(I_4) \Leftrightarrow -5x \geq -25$

$(I_4) \Leftrightarrow x \leq 5$ **$S =]-\infty\,;5]$**

$\boxed{(I_5)\ -3(-2x+8)(3x-12) \leq 0}$

-3 ne s'annule pas et reste toujours strictement négatif.

$-2x+8=0 \Leftrightarrow -2x=-8 \Leftrightarrow x=4$

$3x-12=0 \Leftrightarrow 3x=12 \Leftrightarrow x=4$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
-3		$-$		$-$	
$-2x+8$		$+$	0	$-$	
$3x-12$		$-$	0	$+$	
$-3(-2x+8)(3x-12)$		$+$	0	$+$	

S = {4}

$\boxed{(\mathbf{I_6})\ \dfrac{4-2x}{-x+5} > 0}$ Valeur interdite : $-x+5=0 \Leftrightarrow -x=-5 \Leftrightarrow x=5$ On résout dans $\mathbb{R}\backslash\{5\}$

$4-2x=0 \Leftrightarrow 4=2x \Leftrightarrow 2=x$

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$4-2x$		+	0	−		−	
$-x+5$		+		+	0	−	
$\dfrac{4-2x}{-x+5}$		+	0	−	‖	+	

S =] − ∞ ; 2 [∪] 5 ; +∞ [

<u>Exercice 5</u> : Soit x le nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.
Comme 66 trèfles ont été cueillis en tous, le nombre de trèfles à trois feuilles est $66-x$
Il y a 4 fois plus de feuilles de trèfles à 4 feuilles que le nombre de trèfles à 4 feuilles.
Il y en a donc $4x$
Il y a 3 fois plus de feuilles de trèfles à trois feuilles que le nombre de trèfles à 3 feuilles.
Il y en a donc $3(66-x)$
Le nombre total de feuilles est donc :
d'une part $4x + 3(66-x)$ d'autre part 215
D'où l'équation à résoudre $4x + 3(66-x) = 215$ (E)
(E) $\Leftrightarrow 4x + 198 - 3x = 215$
(E) $\Leftrightarrow x = 215 - 198 = 17$

Il y a 17 trèfles à 4 feuilles et 49 (66 − 17) trèfles à 3 feuilles.

Vérifions : $17\times4 + 49\times3 = 68 + 147 = 215$

<u>Exercice 6</u> : Considérons le triangle ABC rectangle en A, où C est le haut de l'échelle, A le pied du mur et B le pied de l'échelle une fois descendue.
D'après le théorème de Pythagore, on a :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$, ce qui donne, en cm, si on nomme x la longueur inconnue BC :

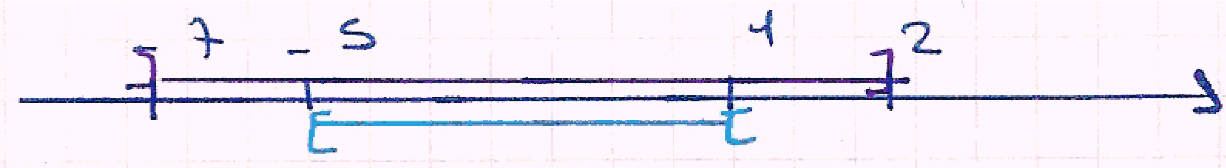
$$\begin{aligned} x^2 = 70^2 + (x-10)^2 \quad &\Leftrightarrow x^2 = 4\,900 + x^2 - 20x + 100 \\ &\Leftrightarrow 0 = 5000 - 20x \\ &\Leftrightarrow 20x = 5000 \\ &\Leftrightarrow x = 250 \end{aligned}$$

L'échelle mesure 250 cm soit 2 m 50.

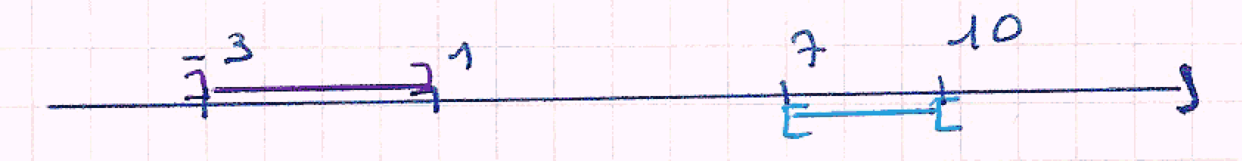
2^{nde} 3 – Corrigé de l'interrogation de mathématiques n°5 – Sujet B

Exercice 1 :

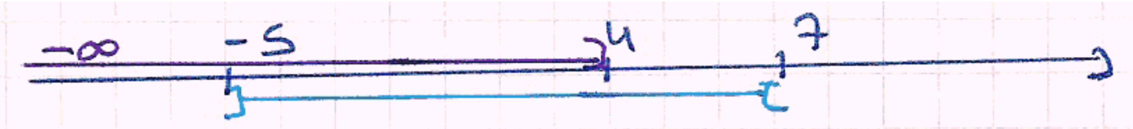
a) $]-7\,;2] \cup [-5\,;1[\; = \;]-7\,;2]$ **a')** $]-7\,;2] \cap [-5\,;1[\; = [-5\,;1[$



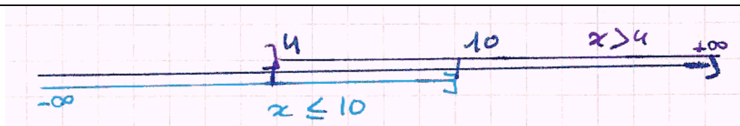
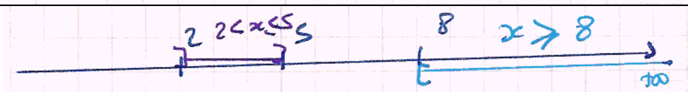
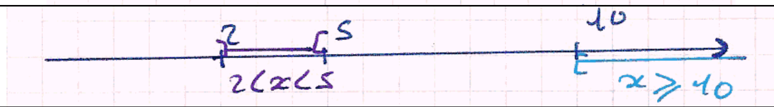
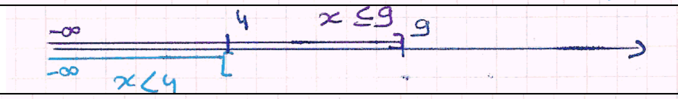
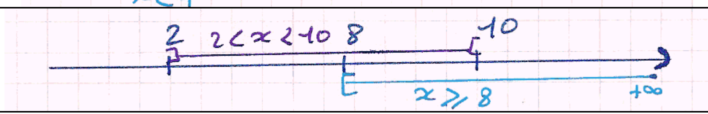
b) $]-3\,;1] \cup [7\,;10[\; = \;]-3\,;1] \cup [7\,;10[$ **b')** $]-3\,;1] \cap [7\,;10[\; = \varnothing$



c) $]-\infty\,;4] \cup]-5\,;7[\; = \;]-\infty\,;7[$ **c')** $]-\infty\,;4] \cap]-5\,;7[\; = \;]-5\,;4]$



Exercice 2 :

a) $x > 4$ et $x \leq 10$ $x \in \;]4\,;10]$	
b) $2 < x \leq 5$ ou $x \geq 8$ $x \in \;]2\,;5] \cup [8\,;+\infty[$	
c) $2 < x < 5$ et $x \geq 10$ $x \in \varnothing$	
d) $x \leq 9$ et $x < 4$ $x \in \;]-\infty\,;4[$	
e) $2 < x < 10$ ou $x \geq 8$ $x \in \;]2\,;+\infty[$	

Exercice 3 : a, b et c sont trois nombres tels que :

$-2 < a < 1 \qquad 5 < b < 8 \quad$ et $\quad -4 < c < -2$.

$-2 < a < 1 \iff 2 > -a > -1$ $\iff -1 < -a < 2$ On change le sens d'une inégalité quand on multiplie ses deux membres par un nombre strictement négatif (ici : – 1)	$-4 < c < -2 \iff -\frac{1}{4} > \frac{1}{c} > -\frac{1}{2}$ $\iff -\frac{1}{2} < \frac{1}{c} < -\frac{1}{4}$ Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$, le passage à l'inverse inverse l'ordre lorsque tous les nombres sont négatifs.
$-2 < a < 1 \iff -8 < 4a < 4$ (Pas de changement d'ordre quand on multiplie tous les membres par un nombre strictement positif, ici : 4)	$-2 < a < 1 \iff 1 < a + 3 < 4$ (on ne change pas le sens lorsqu'on additionne un même nombre, ici 3, à tous les membres)

$5 < b < 8 \Leftrightarrow -10 > -2b > -16$ $\Leftrightarrow -16 < -2b < -10$ (on change l'ordre quand on multiplie tous les membres par un nombre strictement négatif, ici -2) On additionne membre à membre : $-8 < 4a < 4$ $-16 < -2b < -10$ $\underline{-4 < c < -2}$ $-28 < 4a - 2b + c < -8$	$5 < b < 8 \Leftrightarrow \frac{1}{5} > \frac{1}{b} > \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{b} < \frac{1}{5}$ Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$, le passage à l'inverse change l'ordre lorsque tous les nombres sont strictement positifs. On multiplie membre à membre (on a le droit parce que tous les nombres sont positifs) : $1 < a + 3 < 4$ et $\frac{1}{8} < \frac{1}{b} < \frac{1}{5}$ Ce qui donne $\frac{1}{8} < \frac{a+3}{b} < \frac{4}{5}$

<u>Exercice 4</u> : $\boxed{(E_1)\ (2x-5)^2 = (3x+1)^2}$

$(E_1) \Leftrightarrow (2x-5)^2 - (3x+1)^2 = 0$
$(E_1) \Leftrightarrow [\,(2x-5) - (3x+1)\,]\,[\,(2x-5) + (3x+1)\,] = 0$
$(E_1) \Leftrightarrow (2x - 5 - 3x - 1)(2x - 5 + 3x + 1) = 0$
$(E_1) \Leftrightarrow (-x-6)(5x-4) = 0$
$(E_1) \Leftrightarrow -x - 6 = 0$ ou $5x - 4 = 0$
$(E_1) \Leftrightarrow -x = 6$ ou $5x = 4$
$(E_1) \Leftrightarrow x = -6$ ou $x = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\mathbf{S = \{-6\,;\,\frac{4}{5}\}}$

$\boxed{(I_1)\ (2x-5)^2 > (3x+1)^2} \Leftrightarrow (-x-6)(5x-4) > 0$ (mêmes calculs que pour (E_1))

On sait que $-x-6$ s'annule en $x = -6$ et $5x - 4$ en $x = \frac{4}{5}$

x	$-\infty$		-6		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$-x-6$		$+$	0	$-$		$-$	
$5x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-x-6)\times(5x-4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\mathbf{S = \left]-6\,;\,\frac{4}{5}\right[}$$

$\boxed{(E_2)\ \frac{4}{x^2-9} = \frac{x+3}{x-3}}$	Valeurs interdites : $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

On résout (E_2) dans $\mathbb{R}\setminus\{-3\,;\,3\}$

$(E_2) \Leftrightarrow \frac{4}{(x+3)(x-3)} = \frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)}$
$(E_2) \Leftrightarrow 4 = (x+3)^2$ (on peut multiplier les 2 membres par $(x+3)$ et $(x-3)$ car ils sont non nuls)
$(E_2) \Leftrightarrow 2^2 = (x+3)^2 \Leftrightarrow x + 3 = 2$ ou $x + 3 = -2$
(Deux nombres ont le même carré si et seulement si sont égaux ou opposés)
$(E_2) \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -5$ $\qquad$ $S = \{-5\,;\,-1\}$

$\boxed{(I_2)\ \dfrac{4}{x^2-9} \leq \dfrac{x+3}{x-3}}$	Valeurs interdites : $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

On résout (I_2) dans $\mathbb{R}\backslash\{-3 ; 3\}$

$$(I_2) \Leftrightarrow \frac{4}{(x+3)(x-3)} - \frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)} \leq 0$$

$$(I_2) \Leftrightarrow \frac{4-(x+3)^2}{(x+3)(x-3)} \leq 0$$

$$(I_2) \Leftrightarrow \frac{[\,2-(x+3)\,]\,[\,2+(x+3)\,]}{(x+3)(x-3)} \leq 0$$

$$(I_2) \Leftrightarrow \frac{(\,2-x-3\,)(\,2+x+3)}{(x+3)(x-3)} \leq 0$$

$$(I_2) \Leftrightarrow \frac{(-x-1)\,(x+5)}{(x+3)(x-3)} \leq 0$$

$-x-1$ s'annule pour $x = -1$ et $x + 5$ pour $x = -5$.
$x + 3$ s'annule pour $x = -3$ et $x - 3$ pour $x = 3$.

x	$-\infty$		-5		-3		-1		3		$+\infty$
$-x-1$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{(-x-1)(x+5)}{(x+3)(x-3)}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$S =]-\infty ; -5\,] \cup\,]-3 ; -1\,] \cup\,]\,3 ; +\infty[$

<u>Exercice 5</u> : Résoudre les inéquations. Indiquer l'ensemble des solutions. **9 points**

$\boxed{\mathbf{(I_3)}\ -10x > 3x + 1}$ $\mathbf{(I_3)} \Leftrightarrow -13x > 1$ $\mathbf{(I_3)} \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{13}$ $S =]-\infty ; -\dfrac{1}{13}[$	$\boxed{\mathbf{(I_4)}\ 3 - \dfrac{2x-1}{4} \geq \dfrac{2-x}{3}}$ $(I_4) \Leftrightarrow \dfrac{12-(2x-1)}{4} \geq \dfrac{2-x}{3}$ $(I_4) \Leftrightarrow \dfrac{13-2x}{4} \geq \dfrac{2-x}{3}$ $(I_4) \Leftrightarrow 3\,(13-2x) \geq 4(2-x)$ $(I_4) \Leftrightarrow 39 - 6x \geq 8 - 4x$ $(I_4) \Leftrightarrow -2x \geq -31$ $(I_4) \Leftrightarrow x \leq \dfrac{31}{2}$ **$S =]-\infty ; \dfrac{31}{2}]$**

$\boxed{\mathbf{(I_5)}\ -4\,(-2x+10)\,(3x-15) \leq 0}$

-4 ne s'annule jamais est reste toujours strictement négatif.

$2x - 10 = 0 \Leftrightarrow -2x = -10 \Leftrightarrow x = 5$
$3x - 15 = 0 \Leftrightarrow 3x = 15 \Leftrightarrow x = 5$

x	$-\infty$		5		$+\infty$
-4		$-$		$-$	
$-2x + 10$		$+$	0	$-$	
$3x - 15$		$-$	0	$+$	
$-4(-2x + 10)(3x - 15)$		$+$	0	$+$	

S = {5} (le produit n'est jamais négatif, mais il s'annule pour x = 5)

$\boxed{(\mathbf{I_6})\ \dfrac{3-4x}{-x-6} < 0}$ Valeur interdite : $-x - 6 = 0 \Leftrightarrow -x = 6 \Leftrightarrow x = -6$

$3 - 4x$ s'annule pour $3 = 4x \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{3}{4}$

x	$-\infty$		-6		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$3 - 4x$		$+$		$+$	0	$-$	
$-x - 6$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{4-2x}{-x+5}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

$$\mathbf{S =]-6\ ;\ \frac{3}{4}[}$$

<u>Exercice 5</u> : Soit x le nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.
Comme 84 trèfles ont été cueillis en tous, le nombre de trèfles à trois feuilles est $84 - x$
Il y a 4 fois plus de feuilles de trèfles à 4 feuilles que le nombre de trèfles à 4 feuilles.
Il y en a donc $4x$
Il y a 3 fois plus de feuilles de trèfles à trois feuilles que le nombre de trèfles à 3 feuilles.
Il y en a donc $3(84 - x)$
Le nombre total de feuilles est donc :
d'une part $4x + 3(84 - x)$ d'autre part 258
D'où l'équation à résoudre $4x + 3(84 - x) = 258$ (E)
(E) $\Leftrightarrow 4x + 252 - 3x = 258$
(E) $\Leftrightarrow x = 258 - 252 = 6$

Il y a 6 trèfles à 4 feuilles et 78 (84 − 6) trèfles à 3 feuilles.
Vérifions : $4\times6 + 78\times3 = 24 + 234 = 258$

<u>Exercice 6</u> : Considérons le triangle ABC rectangle en A, où C est le haut de l'échelle, A le pied du mur et B le pied de l'échelle une fois descendue.
D'après le théorème de Pythagore, on a :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$, ce qui donne, en cm, si on nomme x la longueur inconnue BC :

$x^2 = 70^2 + (x - 10)^2 \quad \Leftrightarrow x^2 = 4\,900 + x^2 - 20x + 100$
$\Leftrightarrow 0 = 5000 - 20x$
$\Leftrightarrow 20x = 5000$
$\Leftrightarrow x = 250$

L'échelle mesure 250 cm soit 2 m 50.