2^{nde} 3 – Corrigé du devoir surveillé n°3 – Sujet A

<u>Exercice 1</u> : (I_1) $\frac{2}{3}x + 5 > \frac{5}{2}x - \frac{1}{6}$

(I_1) $\Leftrightarrow \frac{4}{6}x + \frac{30}{6} > \frac{15}{6}x - \frac{1}{6}$

(I_1) $\Leftrightarrow 4x + 30 > 15x - 1$

(I_1) $\Leftrightarrow -11x > -31$

(I_1) $\Leftrightarrow x < \frac{31}{11}$

$S =]-\infty ; \frac{31}{11}[$

(I_2) $-3(x^2 + 2) < 0$

-3 est toujours stricetment negatif et $x^2 + 2$ toujours strictement positif. Donc $-3(x^2+2)$ est toujours strictement négatif. $\boxed{S = \mathbb{R}}$

(I_3) $(5x - 2)(-2x + 6) > 0$

$5x - 2 > 0 \Leftrightarrow 5x > 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{5}$

$-2x + 6 > 0 \Leftrightarrow -2x > -6 \Leftrightarrow x < 3$

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		3		$+\infty$
$5x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$(5x-2)(-2x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]\frac{2}{5} ; 3[$

(I_4) $\frac{-5x+10}{3x+4} \leq 0$

Valeur interdite : $3x + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$

On résout dans $\mathbb{R} - \{-\frac{4}{3}\}$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$-5x+10$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-5x+10}{3x+4}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty ; -\frac{4}{3}[\cup [2 ; +\infty[$

(I_5) $(4x-1)^2 \geq (x-4)^2$

$\Leftrightarrow (4x-1)^2 - (x-4)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (4x - 1 - x + 4)(4x - 1 + x - 4) \geq 0$

$\Leftrightarrow (3x+3)(5x-5) \geq 0$

$3x + 3 > 0 \Leftrightarrow 3x > -3 \Leftrightarrow x > -1$

$5x - 5 > 0 \Leftrightarrow 5x > 5 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$3x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$(3x+3)(5x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$

(I_6) $\mathbf{\dfrac{2}{x-2} \geq \dfrac{1}{x^2-4}}$

Valeurs interdites : $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$

On résout dans $\mathbb{R} \setminus \{ -2 ; 2 \}$

$(I_6) \Leftrightarrow \dfrac{2(x+2)}{(x-2)(x+2)} \geq \dfrac{1}{x^2-4}$

$(I_6) \Leftrightarrow \dfrac{2x+4}{(x-2)(x+2)} \geq \dfrac{1}{(x-2)(x+2)}$

$(I_6) \Leftrightarrow \dfrac{2x+4}{(x-2)(x+2)} - \dfrac{1}{(x-2)(x+2)} \geq 0$

$(I_6) \Leftrightarrow \dfrac{2x+3}{(x-2)(x+2)} \geq 0$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$2x + 3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{2x+3}{(x-2)(x+2)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$$\mathbf{S =]-2 ; -\tfrac{3}{2}] \cup]2 ; +\infty[}$$

<u>Exercice 2</u> : On sait que $1 \leq a \leq 3$ et $-4 \leq b \leq -1$

$1 \leq a \leq 3$ donc $\boxed{1 \leq a^2 \leq 9}$ (le passage au carré conserve l'ordre sur $[0 ; +\infty[$)

$-4 \leq b \leq -1$ donc $16 \geq b^2 \geq 1$ soit $\boxed{1 \leq b^2 \leq 16}$ (le passage au carré inverse l'ordre sur $]-\infty ; 0]$)

$1 \leq a \leq 3$ donc $1 \geq \dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{3}$ soit $\boxed{\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{a} \leq 1}$ (le passage à l'inverse inverse l'ordres sur $]0 ; +\infty[$)

$1 \leq a \leq 3$ donc $\boxed{1 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{3}}$ (le passage à la racine carrée conserve l'ordre sur $[0 ; +\infty[$)

$1 \leq a \leq 3$ donc $3 \leq 3a \leq 9$

$-4 \leq b \leq -1$ donc $4 \geq -b \geq 1$ soit $1 \leq -b \leq 4$ donc $4 \leq -4b \leq 16$

$3 \leq 3a \leq 9$ et $4 \leq -4b \leq 16$ donc $\boxed{7 \leq 3a - 4b \leq 25}$

$-4 \leq b \leq -1$ donc $-\dfrac{1}{4} \geq \dfrac{1}{b} \geq -1$ donc $\dfrac{1}{4} \leq -\dfrac{1}{b} \leq 1$

De plus $1 \leq a \leq 3$ donc $\dfrac{1}{4} \leq -\dfrac{a}{b} \leq 3$ donc $-\dfrac{1}{4} \geq \dfrac{a}{b} \geq -3$ soit $-3 \leq \dfrac{a}{b} \leq -\dfrac{1}{4}$

<u>Questions de cours</u> :

1- Les réels positifs strictement supérieurs à leur racine carré sont compris dans l'intervalle $]1 ; +\infty[$

2- Si $x < y$, $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$ à condition que x et y soient de même signe.

2^{nde} 3 – Corrigé du devoir surveillé n°3 – Sujet B

Exercice 1 : **(I_1)** $\mathbf{\frac{5}{2}x + 5 > \frac{10}{3}x - \frac{1}{6}}$

(I_1) $\Leftrightarrow \frac{15}{6}x + \frac{30}{6} > \frac{20}{6}x - \frac{1}{6}$

(I_1) $\Leftrightarrow 15x + 30 > 20x - 1$

(I_1) $\Leftrightarrow - 5x > - 31$

(I_1) $\Leftrightarrow x < \frac{31}{5}$

$\mathbf{S =]- \infty ; \frac{31}{5}[}$

(I_2) $\mathbf{- 5 (x^2 + 1) > 0}$

$- 3$ est toujours stricetment negatif et $x^2 + 2$ toujours strictement positif. Donc $- 3 (x^2 + 2)$ est toujours strictement négatif. $\boxed{S = \varnothing}$

(I_3) $\mathbf{(- 5x + 3) (2x + 8) > 0}$

$- 5x + 3 > 0 \Leftrightarrow - 5x > - 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{5}$

$2x + 8 > 0 \Leftrightarrow 2x > - 8 \Leftrightarrow x < - 4$

x	$-\infty$		-4		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$-5x+3$		+		+	0	−	
$2x+8$		−	0	+		+	
$(5x-2)(-2x+6)$		−	0	+	0	−	

$\mathbf{S =]- 4 ; \frac{3}{5}[}$

(I_4) $\mathbf{\frac{- 7x + 21}{- x + 4} \leq 0}$

Valeur interdite : $- x + 4 = 0 \Leftrightarrow -x = - 4 \Leftrightarrow x = 4$

On résout dans $\mathbb{R} - \{ 4 \}$

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$-7x+21$		+	0	−		−	
$-x+4$		+		−	0	+	
$\frac{-5x+10}{3x+4}$		+	0	−	‖	+	

S = [3 ;4 [

(I_5) $\mathbf{(5x - 1)^2 \leq (x - 5)^2}$

$\Leftrightarrow (5x - 1)^2 - (x - 5)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (5x - 1 - x + 5) (5x - 1 + x - 5) \leq 0$

$\Leftrightarrow (4x + 4) (6x - 6) \leq 0$

$4x + 4 > 0 \Leftrightarrow 4x > - 4 \Leftrightarrow x > - 1$

$6x - 6 > 0 \Leftrightarrow 6x > 6 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$4x+4$		−	0	+		+	
$6x-6$		−		−	0	+	
$(4x+4)(6x-6)$		+	0	−	0	+	

S = [− 1 ; 1]

(I_6) $\mathbf{\frac{3}{x - 3} \geq \frac{1}{x^2 - 9}}$

Valeurs interdites : $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = - 3$

$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = - 3$ ou $x = 3$

On résout dans $\mathbb{R} \setminus \{ -3 \,;\, 3 \}$

$(I_6) \Leftrightarrow \dfrac{3\,(x+3)}{(x-3)(x+3)} \geq \dfrac{1}{(x-3)(x+3)}$

$(I_6) \Leftrightarrow \dfrac{3\,x+9}{(x+3)(x-3)} \geq \dfrac{1}{(x-3)(x+3)}$

$(I_6) \Leftrightarrow \dfrac{3\,x+9}{(x+3)(x-3)} - \dfrac{1}{(x-3)(x+3)} \geq 0$

$(I_6) \Leftrightarrow \dfrac{3x+8}{(x-3)(x+3)} \geq 0$

x	$-\infty$		-3		$-\frac{8}{3}$		3		$+\infty$
$3x+8$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{3x+8}{(x-3)(x+3)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$$\mathbf{S = \left] -3 \,;\, -\frac{8}{3} \right] \cup \left] 3 \,;\, +\infty \right[}$$

<u>Exercice 2</u> : On sait que $2 \leq a \leq 5$ et $-6 \leq b \leq -3$

$2 \leq a \leq 5$ donc $\boxed{4 \leq a^2 \leq 25}$ (le passage au carré conserve l'ordre sur $[\,0 \,;\, +\infty\,[$)

$-6 \leq b \leq -3$ donc $36 \geq b^2 \geq 9$ soit $\boxed{9 \leq b^2 \leq 36}$ (le passage au carré inverse l'ordre sur $]\,-\infty \,;\, 0\,]$)

$2 \leq a \leq 5$ donc $\dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{5}$ soit $\boxed{\dfrac{1}{5} \leq \dfrac{1}{a} \leq \dfrac{1}{2}}$ (le passage à l'inverse inverse l'ordres sur $]\,0 \,;\, +\infty\,[$)

$2 \leq a \leq 5$ donc $\sqrt{2} \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{5}$ (le passage à la racine carrée conserve l'ordre sur $[\,0 \,;\, +\infty\,[$)

$2 \leq a \leq 5$ donc $4 \leq 2a \leq 10$

$-6 \leq b \leq -3$ donc $6 \geq -b \geq 3$ soit $3 \leq -b \leq 6$ donc $15 \leq -5b \leq 30$

$4 \leq 2a \leq 10$ et $15 \leq -5b \leq 30$ donc $\boxed{19 \leq 2a - 5b \leq 40}$

$-6 \leq b \leq -3$ donc $-\dfrac{1}{6} \geq \dfrac{1}{b} \geq -\dfrac{1}{3}$ donc $-\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{b} \leq -\dfrac{1}{6}$ donc $\dfrac{1}{3} \geq -\dfrac{1}{b} \geq \dfrac{1}{6}$ donc $\dfrac{1}{6} \leq -\dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{3}$

De plus $2 \leq a \leq 5$ donc $\dfrac{2}{6} \leq -\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{5}{3}$ donc $-\dfrac{1}{3} \geq \dfrac{a}{b} \geq -\dfrac{5}{3}$ soit $\boxed{-\dfrac{5}{3} \leq \dfrac{a}{b} \leq -\dfrac{1}{3}}$

<u>Questions de cours</u> :

1- Les réels positifs strictement inférieurs à leur racine carré sont compris dans l'intervalle $]\,0 \,;\, 1\,[$

2- x et y étant deux réels non nuls tels que $x < y$. $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$ si et seulement si $x < 0$ et $y > 0$.