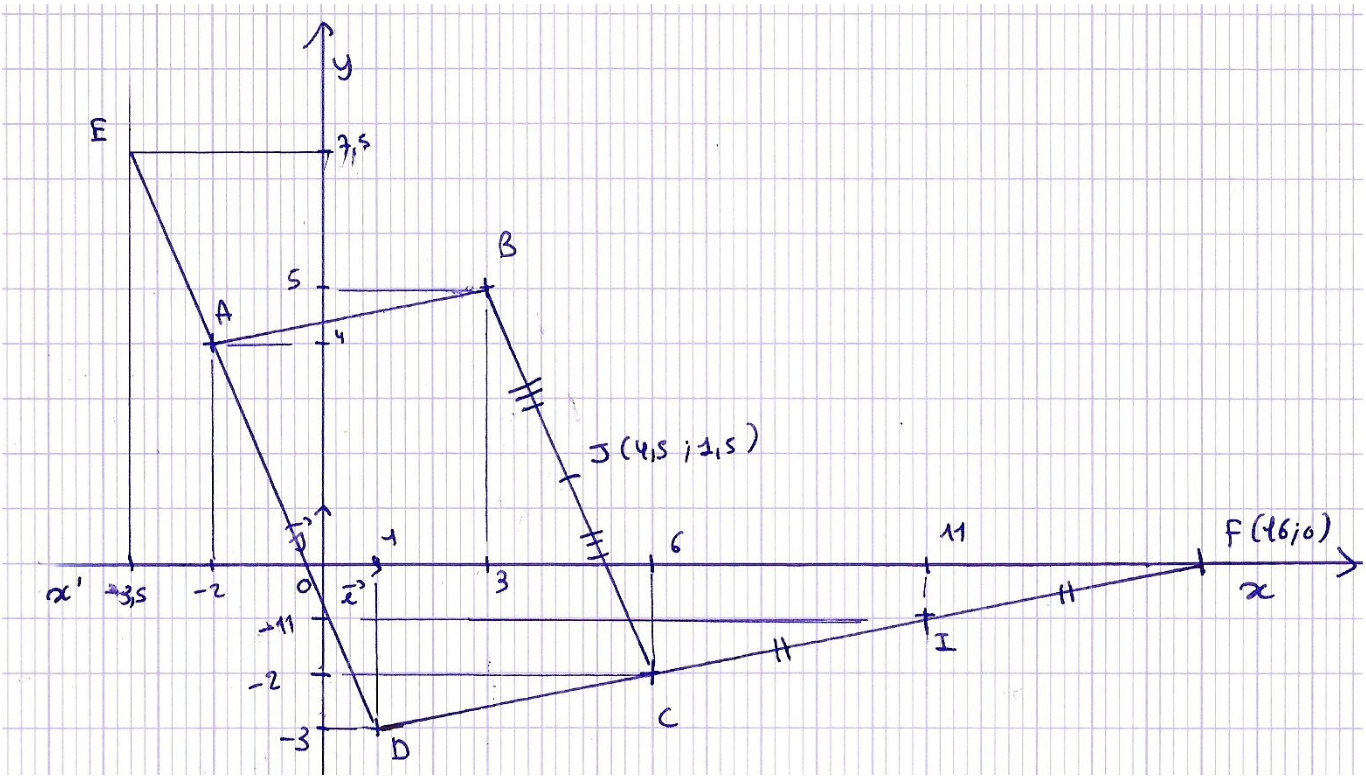
2nde – Corrigé de l'exercice 58 page 244

1) A (– 2 ; 4) B (3 ; 5) C (6 ; – 2)



2) ABCD sera un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 5-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 6-x_D \\ -2-y_D \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 6 - x_D \\ 1 = -2 - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 6 - 5 \\ y_D = -2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = -3 \end{cases}$ $\boxed{D\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}$

3) $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix} 1-x_E \\ -3-y_E \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EA}\begin{pmatrix} -2-x_E \\ 4-y_E \end{pmatrix}$ $-3\,\overrightarrow{EA}\begin{pmatrix} 6+3x_E \\ -12+3y_E \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{ED} - 3\,\overrightarrow{EA} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_E + 6 + 3x_E = 0 \\ -3 - y_E - 12 + 3\,y_E = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x_E = -7 \\ 2\,y_E = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -\dfrac{7}{2} = -3,5 \\ y_E = \dfrac{15}{2} = 7,5 \end{cases}$

$\boxed{E\begin{pmatrix} -3,5 \\ 7,5 \end{pmatrix}}$

4) <u>Méthode 1</u> : avec les coordonnées : $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} -3,5-(-2) \\ 7,5-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} -1,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} -2-1 \\ 4-(-3) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ d'où $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} -1,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$, c'est pourquoi $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

<u>Méthode 2</u> : avec la relation de Chasles :

On sait que $\overrightarrow{ED} - 3\,\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{0}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} - 3\,\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{0}$ d'après la relation de Chasles

$\Leftrightarrow$ $-2\,\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DA}$

$\Leftrightarrow$ $2\,\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DA}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ C.Q.F.D.

5) $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 6-1 \\ -2-(-3) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $2\,\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix} x_F - 6 \\ y_F + 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CF} = 2\,\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F - 6 = 10 \\ y_F + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 16 \\ y_F = 0 \end{cases}$ $\boxed{F\begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix}}$

6) $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 16-(-3{,}5) \\ 0-7{,}5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 19{,}5 \\ -7{,}5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix} 3-16 \\ 5-0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix} -13 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 19{,}5 & -13 \\ -7{,}5 & 5 \end{vmatrix} = 19{,}5 \times 5 - (-7{,}5) \times (-13) = 97{,}5 - 97{,}5 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont colinéaires, donc les points E, F et B sont alignés.

7) I est le milieu de [CF], donc ses coordonnées sont $\left(\dfrac{x_C + x_F}{2} ; \dfrac{y_C + y_F}{2}\right)$

Soit $I\begin{pmatrix} \dfrac{6+16}{2} \\ \dfrac{-2+0}{2} \end{pmatrix}$ soit $\boxed{I\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}}$

J est le milieu de [BC], donc ses coordonnées sont $\left(\dfrac{x_B + x_C}{2} ; \dfrac{y_B + y_C}{2}\right)$

Soit $J\begin{pmatrix} \dfrac{3+6}{2} \\ \dfrac{5-2}{2} \end{pmatrix}$ soit $\boxed{J\begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}}$

Le milieu de [AI] aura pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_I}{2} ; \dfrac{y_A + y_I}{2}\right)$ soit $\left(\dfrac{-2+11}{2} ; \dfrac{4-1}{2}\right)$

Soit $\begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$, qui sont les coordonnées de J, donc J est bien le milieu de [AI].