2^{nde} 4 – Mathématiques – Corrigé du Devoir Maison n°5
Pour le jeudi 11 décembre 2008

<u>Exercice 1</u> :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\boxed{/3}$

(E_1) $x^2 = 5$	(E_2) $x^2 = -3$	(E_3) $x^2 = 0$
$(E_1) \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$	$-3 < 0$	$(E_3) \Leftrightarrow x = 0$
$S = \{ -\sqrt{5} ; \sqrt{5} \}$	$S = \varnothing$	$S = \{0\}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes, sauf quatre que vous ne savez pas encore résoudre, mais à vous de trouver desquelles il s'agit (nous apprendrons bientôt à les résoudre) : $\boxed{/8}$

(I_1) $x^2 > 5$ $(I_1) \Leftrightarrow x^2 - 5 > 0$ $(I_1) \Leftrightarrow (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) > 0$ On ne sait pas encore résoudre.	(I_2) $x^2 > -3$ Vrai pour tout x car le carré de tout nombre réel est positif ou nul donc nécessairement strictement supérieur à – 3. $\boxed{S = \mathbb{R}}$	(I_3) $x^2 > 0$ Vrai pour tout x sauf 0 car le carré de tout nombre réel est positif, et il n'est nul que si x = 0 $S = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $=]-\infty ; 0[\cup] 0 + \infty [$
(I'_1) $x^2 \geq 5$ $(I'_1) \Leftrightarrow (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) \geq 0$ On ne sait pas encore résoudre	(I'_2) $x^2 \geq -3$ $\boxed{S = \mathbb{R}}$ cf I_2	(I'_3) $x^2 \geq 0$ Vrai pour tout x car le carré de tout réel est positif ou nul $\boxed{S = \mathbb{R}}$
(I''_1) $x^2 < 5$ $(I''_1) \Leftrightarrow (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) < 0$ On ne sait pas encore résoudre.	(I''_2) $x^2 < -3$ Toujours faux. car le carré de tout réel est positif, donc ne peut être inférieur à – 3. $\boxed{S = \varnothing}$	(I''_3) $x^2 < 0$ Toujours faux car le carré de tout réel est positif. $\boxed{S = \varnothing}$
(I'''_1) $x^2 \leq 5$ $(I'''_1) \Leftrightarrow (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) \leq 0$ On ne sait pas encore résoudre.	(I'''_2) $x^2 \leq -3$ $\boxed{S = \varnothing}$ cf (I''_2)	(I'''_3) $x^2 \leq 0$ $\boxed{S = \{0\}}$ Car $x^2 < 0$ n'a pas de solution, et $x^2 = 0$ a pour unique solution x = 0.

<u>Exercice 2</u> : Résoudre les équations $\boxed{/4}$

(E_4) $\dfrac{3x}{x-1} = \dfrac{3x+3}{x^2-1}$

<u>Valeurs interdites</u> : $\bullet$ $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\bullet$ $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

On résout donc dans $\mathbb{R} - \{ -1 ; 1 \}$, c'est-à-dire pour $x \neq -1$ et $x \neq 1$

$(E_4)\ \dfrac{3x}{x-1} = \dfrac{3x+3}{x^2-1} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{3x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{3x+3}{(x-1)(x+1)}$

$\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 3x = 3x + 3$

On a le droit de multiplier les deux membres par $(x - 1)(x + 1)$ car ce nombre est non nul étant donné que $x \neq 1$ et $x \neq -1$.

$(E_4) \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

Mais 1 et – 1 sont des valeurs interdites. Donc $\boxed{S = \varnothing}$

$(E_5)\ \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

<u>Valeurs interdites</u> : $\bullet$ $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$\bullet$ $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0$ ou $x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$

On résout dans $\mathbb{R}\backslash\{-2 ;2\}$

$(E_5)\ \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{x^2+1}{x^2-4} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{x^2+1}{(x-2)(x+2)}$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x + 2) = x^2 + 1$

On a le droit de multiplier les deux membres par $(x - 2)(x + 2)$ car ce nombre est non nul étant donné que $x \neq 2$ et $x \neq -2$

$(E_5) \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = x^2 + 1$

$(E_5) \Leftrightarrow 3x + 2 = 1$

$(E_5) \Leftrightarrow 3x = -1$

$(E_5) \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$ $\qquad -\dfrac{1}{3}$ n'est pas valeur interdite, donc $\boxed{S = \{ -\frac{1}{3}\}}$

<u>Exercice 3</u> : Résoudre les inéquations /5

$(I_4)\ -x - 1 \geq 3x + 15$

$(I_4) \Leftrightarrow -4x \geq 16$

$(I_4) \Leftrightarrow x \leq -4$

$\boxed{S =]-\infty ; -4\,]}$

$(I_5)\ 4(x + 1) + 2(x - 2) \geq 5(x - 1)$

$(I_5)\ 4x + 4 + 2x - 4 \geq 5x - 5$

$(I_5) \Leftrightarrow 6x \geq 5x - 5$

$(I_5) \Leftrightarrow x \geq -5$

$\boxed{S = [\,-5 ; +\infty\,[}$

$(I_6)\ \dfrac{5x-2}{9} - \dfrac{x+7}{6} > x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2\times(5x-2)}{2\times 9} - \dfrac{3\times(x+7)}{3\times 6} > x - 1$

$(I_6) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{10x-4}{18} - \dfrac{3x+21}{18} > x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 10x - 4 - (3x + 21) > (x - 1) \times 18$

$(I_6) \Leftrightarrow \quad 10x - 4 - 3x - 21 > 18x - 18 \quad \Leftrightarrow \quad 7x - 25 > 18x - 18$

$(I_6) \Leftrightarrow -11x > 7$ $\Leftrightarrow x < -\frac{7}{11}$ $\boxed{S = \left]-\infty\,;\,-\frac{7}{11}\right[}$